

CCINP 2026 Mathématiques 2 MP-MPI

Proposition de corrigé (toute remarque constructive est la bienvenue!)

Exercice 1

L'énoncé sous-entend que I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Q1.** Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes de J admet comme base (c_1) où $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la première colonne de J ; en fait, c_1 est un vecteur non nul donc (c_1) est une famille libre, et toutes les colonnes de J sont colinéaires (en fait, égales) à c_1 . Ainsi $\boxed{\text{rg}(J) = 1}$
D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(J - 0I)) = \dim(\text{Ker}(J)) = 3 - \text{rg}(J) = 2$$

donc 0 est une valeur propre de J de multiplicité supérieure ou égale à 2 : le polynôme caractéristique de J dans $\mathbb{R}[X]$ est divisible par X^2 , donc en rappelant que le coefficient de X^2 est $-\text{Tr}(J)$ on obtient $\chi_J = X^2(X - \text{Tr}(J)) = X^2(X - 3)$. On en déduit que le polynôme caractéristique de J est scindé et admet comme racines 3 (valeur propre simple de J) et 0 (valeur propre double), et que la multiplicité de la valeur propre 0 est égale à la dimension son sous-espace propre associé; ainsi J est diagonalisable, semblable à la matrice diagonale $\text{Diag}(0, 0, 3)$.

On peut aussi conclure en observant que J est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable d'après le théorème spectral, et que c_1 est un vecteur propre évident associé à la valeur propre 3.

- Q2.** On observe que $A = aJ + bI$ (cette relation est donnée plus bas dans l'énoncé, à la question **Q4.b**), et d'après **Q1**, il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $J = PDP^{-1}$ où $D = \text{Diag}(0, 0, 3)$; il en suit que

$$A = a(PDP^{-1}) + b(PIP^{-1}) = P(aD + bI)P^{-1}$$

donc A est semblable à la matrice diagonale $\boxed{aD + bI = \text{Diag}(b, b, 3a + b)}$

- Q3.** La matrice A est diagonalisable, donc son polynôme minimal est le polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples dont les racines sont les valeurs propres distinctes de A ; comme A est semblable à $\text{Diag}(b, b, 3a + b)$, les valeurs propres de A sont b et $3a + b$ (elles sont distinctes puisque par hypothèse $a \neq 0$). Finalement, $\pi_A = (X - b)(X - 3a - b)$ comme annoncé.

- Q4. a)** Soit $n \in \mathbb{N}$, on note respectivement Q_n et R_n les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui sont le quotient et le reste de la division euclidienne de X^n par π_A : par définition on a $X^n = Q_n\pi_A + R_n$, donc en évaluant les deux membres en les racines de π_A on obtient

$$b^n = 0 + R_n(b) \quad \text{et} \quad \lambda^n = 0 + R_n(\lambda).$$

De plus, le reste R_n est un polynôme de degré strictement inférieur à 2; par interpolation de Lagrange (b et λ sont distincts),

$$R_n = R_n(b) \frac{X - \lambda}{b - \lambda} + R_n(\lambda) \frac{X - b}{\lambda - b} = b^n \frac{X - \lambda}{b - \lambda} + \lambda^n \frac{X - b}{\lambda - b} = \frac{b^n - \lambda^n}{b - \lambda} X + \frac{b\lambda^n - b^n\lambda}{b - \lambda}.$$

En évaluant l'égalité $X^n = Q_n\pi_A + R_n$ en A , et en rappelant que π_A est un polynôme annulateur de A , on obtient

$$A^n = Q_n(A) \underbrace{\pi_A(A)}_{=0} + R_n(A) = R_n(A) \quad \text{d'où} \quad \boxed{A^n = \frac{b^n - \lambda^n}{b - \lambda} A + \frac{b\lambda^n - b^n\lambda}{b - \lambda} I}$$

- b)** La matrice J vérifie $J^2 = 3J$; si, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ on a $J^k = 3^{k-1}J$ (l'égalité est vérifiée pour $k = 1$), alors $J^{k+1} = 3^{k-1}J^2 = 3^k J$: on conclut par récurrence que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad J^k = 3^{k-1}J}$

Les matrices J et I commutent, donc aJ et bI commutent aussi ; d'après la formule du binôme, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} A^n &= (aJ + bI)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aJ)^k (bI)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} J^k \\ &= b^n I + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k a^k b^{n-k} J = b^n I + \frac{(3a+b)^n - b^n}{3} J = b^n I + \frac{\lambda^n - b^n}{3} J \end{aligned}$$

(si $n = 0$, la dernière sommation est vide) ; ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = b^n I + \frac{\lambda^n - b^n}{3} J}$

Les expressions trouvées en (a) et en (b) désignent la même matrice : en fait, comme $a = \frac{\lambda - b}{3}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{b^n - \lambda^n}{b - \lambda} A + \frac{b\lambda^n - b^n \lambda}{b - \lambda} I &= \frac{b^n - \lambda^n}{b - \lambda} \left(\frac{\lambda - b}{3} J + bI \right) + \frac{b\lambda^n - b^n \lambda}{b - \lambda} I \\ &= \frac{\lambda^n - b^n}{3} J + \frac{b^{n+1} - b\lambda^n + b\lambda^n - b^n \lambda}{b - \lambda} I = \frac{\lambda^n - b^n}{3} J + b^n I \end{aligned}$$

Exercice 2

Q5. $j \neq 1$, donc d'après la formule de la somme d'une progression géométrique on a $1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = \frac{1 - 1}{1 - j}$

d'où $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$

Ce résultat se généralise : si n est un entier supérieur ou égal à 2 et l'unité d'un corps $\mathbb{K}$ possède au moins une racine $n^{\text{ème}}$ $\omega \neq 1$, alors la somme S des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité dans $\mathbb{K}$ vérifie $\omega S = S$ (la multiplication par ω est une permutation du sous-groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité), d'où $S = 0$.

Étant donnés trois réels a, b, c , en prenant $P = a + bX + cX^2$ on a (en rappelant que $j^3 = 1$) :

$$P(j)P(j^2) = (a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj^4) = a^2 + ab(j + j^2) + ac(j + j^2) + b^2 + bc(j + j^2) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$$

donc $P(j)P(j^2)$ appartient à $\mathbb{R}$ comme voulu.

Q6. La définition de la matrice J dans le cas $n = 1$ est ambiguë... On considérera dans ce cas que $J = (1)$, pour respecter la contrainte de présence d'un seul 1 dans chaque ligne et colonne.

En général on peut interpréter J comme la matrice dans une base $\mathcal{B}$ fixée d'un espace vectoriel de dimension n de l'endomorphisme σ associé à une permutation cyclique «vers la gauche» des vecteurs de la base : quand $n = 1$, cet endomorphisme est l'identité. On a bien $\chi_J = X^1 - 1$ pour $n = 1$.

On suppose $n \geq 2$. Le polynôme caractéristique de J est le déterminant de la matrice $XI_n - J$, que l'on peut calculer en développant suivant la première colonne, en se ramenant ainsi à deux déterminants triangulaires :

$$\begin{aligned} \chi_J &= \begin{vmatrix} X & -1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & X & -1 \\ -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & & & & & \\ & X & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & X & & \\ (0) & & & & X & \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-1) \begin{vmatrix} -1 & & & & & (0) \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ (*) & & & & -1 & \end{vmatrix} \\ &= X X^{n-1} + (-1)^{n+2}(-1)^{n-1} = X^n - 1 \end{aligned}$$

Q7. On reprend l'interprétation de J comme matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ d'un espace vectoriel E de l'endomorphisme $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ associé à une permutation cyclique des vecteurs de la base $\mathcal{B}$: $\sigma(e_1) = e_n$ et, pour $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\sigma(e_j) = e_{j-1}$.

La matrice $P(J)$ est alors la matrice de l'endomorphisme $P(\sigma)$ dans la base $\mathcal{B}$; pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'image du vecteur e_j est

$$P(\sigma)(e_j) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sigma^k(e_j) = \sum_{k=0}^{j-1} a_k e_{j-k} + \sum_{k=j}^{n-1} a_k e_{n+j-k} = \sum_{i=1}^j a_{j-i} e_i + \sum_{i=j+1}^n a_{n+j-i} e_i$$

et on conclut que $\boxed{P(J) = A}$

Q8. Le polynôme caractéristique de J est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, ses racines sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité; il en découle que J est diagonalisable, et il existe une matrice inversible $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$J = QDQ^{-1} \quad \text{où} \quad D = \text{Diag}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$$

D'après **Q7.**, $A = P(J)$; or l'application de conjugaison $M \mapsto QMQ^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc $A = P(J) = P(QDQ^{-1}) = QP(D)Q^{-1}$:

$$A \text{ est semblable à la matrice diagonale } P(D) = \text{Diag}(P(\omega_0), P(\omega_1), \dots, P(\omega_{n-1}))$$

Q9. Deux matrices semblables ont le même déterminant; en utilisant le résultat de **Q8.**,

$$\prod_{j=0}^{n-1} P(\omega_j) = \det \text{Diag}(P(\omega_0), P(\omega_1), \dots, P(\omega_{n-1})) = \det(A)$$

et la matrice A est à coefficients réels, donc $\det(A) \in \mathbb{R}$. Or $\omega_0 = 1$ et le polynôme P est à coefficients réels, donc $P(\omega_0) = P(1) \in \mathbb{R}$; dans le cas où $P(1) \neq 0$ on peut conclure :

$$\prod_{j=1}^{n-1} P(\omega_j) = \frac{\det(A)}{P(1)} \in \mathbb{R}$$

(on remarque que le raisonnement développé depuis la question **Q7.** reste valable lorsque le polynôme P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, le coefficient a_{n-1} pouvant être nul).

Si P est le polynôme nul, la conclusion (*) est banalement vraie.

On suppose que P est non nul et que 1 est une racine de P d'ordre de multiplicité $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$: il existe un polynôme $\tilde{P} \in \mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à $n-1$, tel que $P = (X-1)^m \tilde{P}$, et $\tilde{P}(1) \neq 0$. Alors

$$\prod_{j=1}^{n-1} P(\omega_j) = \left((-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \omega_j) \right)^m \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{P}(\omega_j)$$

D'après le résultat déjà établi, le produit $\prod_{j=1}^{n-1} \tilde{P}(\omega_j)$ est un réel. Le produit $\prod_{j=1}^{n-1} (X - \omega_j)$ est le quotient de $X^n - 1$ par $X - 1$, il s'agit donc d'un polynôme à coefficients réels (explicitement, c'est le polynôme $\sum_{i=0}^{n-1} X^i$); sa valeur en 1 est un réel, donc $\left((-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \omega_j) \right)^m$ est un réel aussi.

On conclut que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, la proposition (*) est vraie.

En réalité, la propriété () est vérifiée par n'importe quel polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. Voici une démonstration indépendante de tout ce qui précède : on observe que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ le conjugué de ω_k est*

$$\overline{\omega_k} = \exp\left(2\pi i - \frac{i2k\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{i2(n-k)\pi}{n}\right) = \omega_{n-k}$$

et puisque le polynôme P est à coefficients réels le conjugué du produit $\Pi = \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k)$ est

$$\overline{\Pi} = \prod_{k=1}^{n-1} \overline{P(\omega_k)} = \prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{\omega_k}) = \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_{n-k}) \stackrel{j=n-k}{=} \prod_{j=1}^{n-1} P(\omega_j) = \Pi$$

donc $\Pi \in \mathbb{R}$, ce qu'il fallait démontrer.

Problème

Q10. On suppose que $(e_0, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F .

a) On pose $x' = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i$. Cette expression montre que $x' \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_n) \in F$; d'autre part, par bilinéarité du produit scalaire pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on a

$$\langle x - x' | e_j \rangle = \langle x | e_j \rangle - \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle \underbrace{\langle e_i | e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \langle x | e_j \rangle - \langle x | e_j \rangle = 0$$

donc $x - x' \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)^\perp = F^\perp$; l'unicité du projeté orthogonal (*admise dans l'énoncé, et qui résulte du fait que F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale*) entraîne $p_F(x) = x'$ comme voulu.

- b) Les vecteurs $p_F(x)$ et $x - p_F(x)$ appartiennent respectivement à F et $F^\perp$ donc ils sont orthogonaux ; d'après le théorème de Pythagore,

$$\|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 = \|p_F(x) + x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2$$

Or $\|x - p_F(x)\|^2 \geq 0$, on en déduit que $\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$.

En reprenant la base orthonormale $(e_0, \dots, e_n)$ et l'expression de $p_F(x)$ établie en (a), une autre application du théorème de Pythagore à la famille orthogonale $(\langle x|e_i\rangle e_i)_{0 \leq i \leq n}$ donne :

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=0}^n \|\langle x|e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i=0}^n \langle x|e_i\rangle^2 \underbrace{\|e_i\|^2}_{=1} = \sum_{i=0}^n \langle x|e_i\rangle^2$$

et avec l'inégalité établie auparavant on conclut que $\sum_{i=0}^n \langle x|e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$ (*inégalité de Bessel*).

Q11. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; en considérant le carré du réel $(|a| - |b|)$ on obtient

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|ab| + b^2 \quad \text{d'où} \quad |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Soient f et g deux fonctions de E . Pour tout $t \in I$, en utilisant l'inégalité que l'on vient d'établir et $e^{-t} > 0$ on trouve

$$|f(t)g(t)e^{-t}| \leq \frac{f(t)^2 + g(t)^2}{2}e^{-t} = \frac{1}{2}f(t)^2e^{-t} + \frac{1}{2}g(t)^2e^{-t};$$

la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}f(t)^2e^{-t} + \frac{1}{2}g(t)^2e^{-t}$ est intégrable sur I en tant que combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I , donc par comparaison la fonction $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$, qui est continue en tant que produit de fonctions continues, est intégrable sur I aussi.

Q12. E est un sous-ensemble du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $C(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$; on considère donc les lois de composition induites par celles de $C(I, \mathbb{R})$ et on montre que E en est un sous-espace vectoriel.

La fonction $t \mapsto 0^2e^{-t}$ est nulle, donc intégrable sur I ; ainsi la fonction nulle appartient à E .

Soient f et g deux fonctions de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après **Q11.** la fonction $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur I ; par combinaison linéaire, la fonction

$$t \mapsto (f + \lambda g)(t)^2e^{-t} = (f(t)^2e^{-t}) + 2\lambda(f(t)g(t)e^{-t}) + \lambda^2(g(t)^2e^{-t})$$

est intégrable sur I aussi ; on en déduit que $f + \lambda g \in E$, ce qui conclut la preuve que E est un sous-espace vectoriel de $C(I, \mathbb{R})$.

D'après **Q11.**, l'application $\langle | \rangle$ est définie sur $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; la commutativité de la multiplication dans $C(I, \mathbb{R})$ entraîne la symétrie de $\langle | \rangle$; la bilinéarité de la multiplication dans $C(I, \mathbb{R})$ et la linéarité de l'intégrale entraînent la bilinéarité de $\langle | \rangle$.

Soit $f \in E$; la fonction $t \mapsto f(t)^2e^{-t}$ est intégrable, positive et continue sur I , donc $\langle f|f \rangle \geq 0$ par positivité de l'intégrale ; de plus, si $\langle f|f \rangle = 0$ alors pour tout $t \in I$ on a $f(t)^2e^{-t} = 0$, d'où $f(t) = 0$, autrement dit f est le vecteur nul de E .

Cela établit que $\langle | \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire, sur E .

Q13. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'identification des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec les fonctions polynomiales associées sur l'intervalle I (*et non pas sur $\mathbb{R}$ comme c'est formulé dans l'énoncé ; cette identification est possible puisque I est un ensemble infini*) permet d'assimiler F à un sous-espace vectoriel de $C(I, \mathbb{R})$; reste à prouver que $F \subset E$.

Soit $f \in F$. f est une fonction polynomiale, donc $t \mapsto f(t)^2e^{-t}$ est une fonction continue sur I . De plus f est de degré majoré par n , donc $f(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{O}(t^n)$, d'où $f(t)^2e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{O}(t^{2n}e^{-t})$; on a

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{2n+2}}{e^t} = 0$ (résultat de croissance comparée de référence), donc $f(t)^2e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$; par

comparaison à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $+\infty$, on déduit que $t \mapsto f(t)^2e^{-t}$ est intégrable sur I , donc $f \in E$. Cela établit l'inclusion $F \subset E$.

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

- a) La fonction h_n est le produit de deux fonctions indéfiniment dérivables $u : x \mapsto x^n$ et $v : x \mapsto e^{-x}$, donc h_n est indéfiniment dérivable et pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on peut exprimer sa dérivée d'ordre p à l'aide de la formule de Leibniz : pour $x \in I$,

$$h_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} u^{(p-k)}(x) v^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-p+k)!} x^{n-p+k} (-1)^k e^{-x}$$

$$\text{donc } \boxed{\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \forall x \in I \quad h_n^{(p)}(x) = n! e^{-x} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{(n-p+k)!} x^{n-p+k}}$$

En particulier si $p < n$ alors $n-p+k \in \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, d'où $\boxed{\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad h_n^{(p)}(0) = 0}$

b) D'après l'expression établie en (a) et la définition de L_n , pour tout $x \in I$ on a

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$

donc L_n est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n ; de plus le coefficient de x^n est non nul, et on a plus précisément :

$$\boxed{\deg(L_n) = n \text{ et le coefficient dominant de } L_n \text{ est égal à } \frac{(-1)^n}{n!} .}$$

Les termes de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont appelés polynômes de Laguerre ; voir aussi : https://fr.wikipedia.org/wiki/Polyn%C3%B4me_de_Laguerre

Q15. Attention, erreur d'énoncé ; ce qu'on veut exprimer n'est pas le produit scalaire $\langle g | h_n^{(n)} \rangle$, mais l'intégrale du produit, $\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt$

On établit un résultat préliminaire utile, qui généralise la formule d'intégration parties à des fonctions de classe C^n : si u et v sont des fonctions de classe C^n sur I , alors, en utilisant la linéarité de la dérivation et la formule de la dérivée d'un produit on obtient par télescopage

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-1-k)} \right)' = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} u^{(k+1)} v^{(n-1-k)} + (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k)} = u v^{(n)} - (-1)^n u^{(n)} v$$

On fixe $m \in \mathbb{N}$ tel que $g \in \mathbb{R}_m[X]$: d'après l'expression de $h_n^{(p)}$ établie en **Q14.**, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ il existe un polynôme $H_{n,p} \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in I \quad h_n^{(p)}(x) = H_{n,p}(x) e^{-x}$; il en suit que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on a

$$g^{(k)}(x) h_n^{(n-1-k)}(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{O} (x^{m+n} e^{-x}) \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g^{(k)}(x) h_n^{(n-1-k)}(x) = 0$$

et, d'après **Q14.a.**, $g^{(k)}(0) h_n^{(n-1-k)}(0) = 0$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse on déduit la convergence et la valeur de l'intégrale ci-après :

$$\int_0^{+\infty} (g(t) h_n^{(n)}(t) - (-1)^n g^{(n)}(t) h_n(t)) dt = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k g^{(k)}(t) h_n^{(n-1-k)}(t) \right]_0^{+\infty} = 0$$

De plus, en imitant le raisonnement de **Q13.** : les produits $g h_n^{(n)}$ et $g^{(n)} h_n$ sont des fonctions continues sur I et, pour $k \in \{0, n\}$:

$$g^{(k)}(t) h_n^{(n-k)}(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{O} \left(t^{m+n+2} e^{-t} \frac{1}{t^2} \right) = \underset{t \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

donc par comparaison à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $+\infty$ ces fonctions sont intégrables sur I ; par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt - (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt = 0,$$

$$\text{d'où } \boxed{\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt}$$

Il en découle immédiatement, par définition de L_n :

$$\langle g | L_n \rangle = \int_0^{+\infty} g(t) L_n(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} g(t) \frac{h_n^{(n)}(t)}{n!} dt = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt$$

$$\text{d'où, en rappelant la définition de } h_n, \quad \boxed{\langle g | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt}$$

Q16. On considère deux entiers naturels i et j , avec $i < j$. D'après **Q14.b**, L_i est un polynôme de degré i , donc $L_i^{(j)} = 0$; en appliquant le résultat de **Q15.** (avec $n = j$), on obtient

$$\langle L_i | L_j \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} \underbrace{L_i^{(j)}(t)}_{=0} t^j e^{-t} dt \quad \text{donc} \quad \boxed{\langle L_i | L_j \rangle = 0}$$

Q17. On reprend la formule d'intégration par parties généralisée établie en **Q15.**, avec $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto e^{-t}$: pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on a $u^{(k)}(0)v^{(n-1-k)}(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u^{(k)}(t)v^{(n-1-k)}(t) = 0$ (résultat de croissance comparée de référence) et $u^{(n)}v$ est la fonction intégrable $t \mapsto n!e^{-t}$, donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^n (-1)^n e^{-t} dt &= \int_0^{+\infty} u(t)v^{(n)}(t) dt \\ &= \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)}(t)v^{(n-1-k)}(t) \right]_0^{+\infty}}_{=0} + (-1)^n \int_0^{+\infty} u^{(n)}(t)v(t) dt = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \end{aligned}$$

et $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$, d'où $\boxed{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!}$

D'après **Q14.b** $L_n^{(n)}$ est le polynôme constant de valeur $n! \frac{(-1)^n}{n!} = (-1)^n$; en utilisant le résultat établi en **Q15.** on obtient

$$\langle L_n | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \quad \text{d'où} \quad \boxed{\langle L_n | L_n \rangle = 1}$$

Ainsi, on peut résumer les résultats des questions **Q16.** et **Q17.** en disant que la suite de polynômes $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale dans l'espace préhilbertien E .

Q18. On remarque d'abord que $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille orthonormale, en particulier libre, de $(n+1)$ éléments de l'espace vectoriel $F = \mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, donc $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormale de F . D'après **Q10.a**, le projeté orthogonal sur F d'un élément $g \in E$ (*noté $p_F(g)$ et non $P_F(g)$*) est donné par

$$\boxed{p_F(g) = \sum_{i=0}^n \langle g | L_i \rangle L_i}$$

Q19. La série $\sum_{n \geq 0} \langle g | L_n \rangle^2$ est à termes positifs et d'après l'inégalité de Bessel **Q10.b** ses sommes partielles

sont majorées par $\|g\|^2$; il en résulte que cette série converge et que $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g | L_n \rangle^2 \leq \|g\|^2}$

Q20. Soit $\alpha \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$. La fonction g_α est continue sur I et pour tout $t \in I$ on a $g_\alpha(t)^2 e^{-t} = e^{-(2\alpha+1)t}$; or $2\alpha+1 > 0$, donc la fonction $t \mapsto g_\alpha(t)^2 e^{-t}$ est intégrable sur I : cela montre que $g_\alpha \in E$. De plus,

$$\|g_\alpha\|^2 = \int_0^{+\infty} g_\alpha(t)^2 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(2\alpha+1)t} dt = \left[\frac{e^{-(2\alpha+1)t}}{-(2\alpha+1)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha+1}.$$

En revanche, si $\alpha \leq -\frac{1}{2}$ alors $2\alpha+1 \leq 0$, et la fonction $t \mapsto g_\alpha(t)^2 e^{-t}$, où $g_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$, n'est pas intégrable sur I . L'énoncé est donc incorrect, l'hypothèse $\alpha > -\frac{1}{2}$ est effectivement nécessaire.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$ on a $g_\alpha^{(k)}(t) = (-1)^k \alpha^k e^{-\alpha t}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n > 0$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on a $g_\alpha^{(k)}(t) h_n^{(n-1-k)}(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{O}(t^n e^{-(2\alpha+1)t})$ donc par croissance comparée $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_\alpha^{(k)}(t) h_n^{(n-1-k)}(t) = 0$; pour $k \in \{0, n\}$,

$$g_\alpha^{(k)}(t) h_n^{(n-k)}(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{O}\left(t^{n+2} e^{-(2\alpha+1)t} \frac{1}{t^2}\right) = \underset{t \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc la fonction continue $g_\alpha^{(k)} h_n^{(n-k)}$ est intégrable sur I . Avec le même raisonnement qu'à la question **Q15.** on obtient :

$$\langle g_\alpha | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g_\alpha^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt = \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-(\alpha+1)t} dt$$

Or $\alpha + 1 > 0$, donc en effectuant le changement de variable affine $u = (\alpha + 1)t$ et en utilisant le résultat établi en **Q17**, on obtient

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-(\alpha+1)t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha+1}\right)^n e^{-u} \frac{du}{\alpha+1} = \frac{1}{(\alpha+1)^{n+1}} n!$$

donc $\langle g_\alpha | L_n \rangle = \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^n$. Par conséquent la série $\sum_{n \geq 0} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2$ est une série géométrique, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+1)^2} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{2n} = \frac{1}{(\alpha+1)^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^2} = \frac{1}{(\alpha+1)^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha+1},$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$ comme annoncé.