

Exercice 1

Q1. Les colonnes de J sont identiques et non nulles donc $\text{rg}(J) = 1$.

$\text{rg}(J - 0I_3) < 3$ donc 0 est valeur propre de J et l'espace propre associé est de dimension 2 (théorème du rang). 0 est donc racine au moins double de χ_J . χ_J étant unitaire et de degré 3, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_J = X^2(X - \alpha)$. χ_J est scindé donc la somme des valeurs propres est égale à la trace : $\alpha = 3$. $\chi_J = X^2(X - 3)$ et J est diagonalisable (soit en remarquant que pour les deux valeurs propres, la multiplicité dans χ_J est égale à la dimension de l'espace propre, soit en utilisant le théorème spectral)

donc J est semblable à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Q2. On remarque que $A = aJ + bI_3$.

On note P inversible telle que $J = PDP^{-1}$.

Alors $A = P(aD + bI_3)P^{-1}$. A est semblable à la matrice diagonale

$$aD + bI_3 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3a + b \end{pmatrix}$$

Q3. A est donc diagonalisable et son polynôme minimal est $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)$. Les valeurs propres de A sont b et $3a + b$ avec $3a + b \neq b$ car $a \neq 0$ donc

$$\pi_A = (X - b)(X - 3a - b)$$

Q4. (a) La division euclidienne de X^n par π_A s'écrit $X^n = \pi_A Q + R$ avec Q, R dans $\mathbb{R}[X]$ et $\deg(R) < 2$. R s'écrit donc $\alpha X + \beta$. En évaluant en b et en λ , on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha b + \beta = b^n \\ \alpha \lambda + \beta = \lambda^n \end{cases}$$

Avec $b \neq \lambda$, on obtient $\alpha = \frac{b^n - \lambda^n}{b - \lambda}$ et $\beta = \frac{\lambda b^n - \lambda^n b}{\lambda - b}$.

$X^n = \pi_A Q + R$ donc $A^n = \pi_A(A)Q(A) + R(A) = R(A)$ et

$$A^n = \frac{b^n - \lambda^n}{b - \lambda} A + \frac{\lambda b^n - \lambda^n b}{\lambda - b} I_3$$

(b) $J^2 = 3J$ puis, par récurrence sur $k \geq 1$, $J^k = 3^{k-1}J$.

$A = aJ + bI$ où J et I commutent donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k J^k b^{n-k} I^{n-k} \\ A^n &= b^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b^{n-k} a^k 3^{k-1} J \\ &= b^n I + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} J \\ &= b^n I + \frac{1}{3} ((3a + b)^n - b^n) J \end{aligned}$$

Finalement,

$$A^n = \frac{1}{3} ((3a + b)^n J + b^n (3I - J))$$

Exercice 2

Q5. $1 + j + j^2 = 0$ (somme des trois racines cubiques de 1 ou somme de termes consécutifs d'une suite géométrique avec $j^3 = 1$).

On choisit $P = X^2 - X + 2$.

$$P(j)P(j^2) = (j^2 - j + 2)(j - j^2 + 2) = 5 \in \mathbb{R}.$$

Q6. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_J(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$

On développe par rapport à la première colonne :

$$\chi_J(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \times (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \end{vmatrix}.$$

Les deux matrices qui interviennent sont triangulaires donc $\chi_J(\lambda) = \lambda^n + (-1)^{n+2}(-1)^{n-1}$.

Finalement, $\chi_J = X^n - 1$.

Q7. $A = P(J)$.

Q8. $\chi_J = \prod_{k=0}^{n-1} (X - w_k)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ donc J est diagonalisable, semblable à la

$$\text{matrice } D = \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $A = P(J)$ est semblable à $P(D) = \begin{pmatrix} P(\omega_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(\omega_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(\omega_{n-1}) \end{pmatrix}.$

Q9. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\det(A) \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire $P(1) \prod_{k=1}^n P(\omega_k) \in \mathbb{R}$.

Lorsque $P(1) \neq 0$, comme $P(1) \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\prod_{k=1}^n P(\omega_k) \in \mathbb{R}$.

Si $P(1) = 0$: $\chi_A = \prod_{k=0}^{n-1} (X - P(\omega_k)) = X \prod_{k=1}^{n-1} (X - P(\omega_k)).$

χ_A est à coefficients réels ; le coefficient devant X est en particulier réel : $(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) \in \mathbb{R}.$

Dans tous les cas, $\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) \in \mathbb{R}.$

Problème

Q9. (a) $p_F(x) \in F$ et $(e_0, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F donc

$$p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle p_F(x) | e_i \rangle e_i$$

$x - p_F(x) \in F^\perp$ donc, pour tout i entre 0 et n , $\langle x - p_F(x) | e_i \rangle = 0$ et $\langle x | e_i \rangle = \langle p_F(x) | e_i \rangle$.
Par conséquent,

$$p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i$$

(b) On suppose que $(e_0, \dots, e_n)$ est toujours une base orthonormale de F .

$x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ avec $p_F(x)$ et $x - p_F(x)$ orthogonaux donc, d'après la relation de Pythagore, $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$. Comme $\|x - p_F(x)\|^2 \geq 0$, $\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ et, les normes étant positives,

$$\|p_F(x)\| \leq \|x\|$$

En utilisant l'expression de la norme en base orthonormale et la question précédente,

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2 \text{ donc}$$

$$\sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Q11. $(|a| - |b|)^2 \geq 0$ donc, en développant, $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Soient f et g dans E .

En particulier f et g sont continues sur I donc $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ l'est aussi.

Pour tout $t \in I$, $|f(t)g(t)e^{-t}| \leq \frac{1}{2}(f(t)^2e^{-t} + g(t)^2e^{-t})$ avec $t \mapsto \frac{1}{2}(f(t)^2e^{-t} + g(t)^2e^{-t})$ intégrable sur I (combinaison linéaire de fonctions intégrables) donc, par comparaison, $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur I .

Q12. Montrons que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Par définition, $E \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

La fonction nulle est intégrable donc $t \mapsto 0$ est dans E : $E \neq \emptyset$.

Soient $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour $t \in I$, $(f + \lambda g)^2(t)e^{-t} = f(t)^2e^{-t} + 2\lambda f(t)g(t)e^{-t} + g(t)^2e^{-t}$ donc $t \mapsto (f + \lambda g)(t)^2e^{-t}$ est intégrable sur I en tant que somme de trois fonctions qui le sont : $f + \lambda g \in E$.

On en déduit que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.

D'après ce qui précède, $\langle | \rangle$ est une forme sur $E \times E$.

Pour tout $(f, g) \in E^2$, pour tout $t \in I$, $f(t)g(t) = g(t)f(t)$ donc $\langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle$: $\langle | \rangle$ est symétrique.

Par linéarité d'intégrale généralisée convergente, $\langle | \rangle$ est bilinéaire.

Pour $f \in E$, pour tout $t \in I$, $f(t)^2e^{-t} \geq 0$ donc $\langle f | f \rangle \geq 0$: $\langle | \rangle$ est positive.

Soit $f \in E$ telle que $\langle f | f \rangle = 0$. $t \mapsto f(t)^2e^{-t}$ est continue positive et d'intégrale nulle sur I donc, pour tout $t \in I$, $f(t)^2e^{-t} = 0$: $f(t) = 0$. Par conséquent $f = 0_E$.

On peut alors conclure que $\langle f | f \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire.

Q13. Soit $P \in F$.

P est continue sur I .

Si P est nulle, $t \mapsto P(t)^2e^{-t}$ est intégrable sur I donc $P \in E$.

Si P n'est pas nulle, P équivaut en $+\infty$ à son terme dominant : $P(t) \sim \alpha t^d$ et $P(t)^2e^{-t} \sim \alpha^2 t^{2d} e^{-t}$.

Par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 P(t)^2 e^{-t} = 0$ et $P(t)^2 e^{-t} = o(1/t^2)$. Comme $2 > 1$, $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est intégrable sur I donc $P \in E$.

Par conséquent $F \subset E$.

F est non vide et stable par combinaison linéaire donc F est un sous espace vectoriel de E .

Q14. (a) $a : x \mapsto x^n$ et $b : x \mapsto e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $h_n = ab$ l'est aussi et on peut utiliser la forme de Leibnitz :

$$h_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^{(k)}(x) b^{(p-k)}(x)$$

Par récurrence sur $k \leq n$, $a^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ donc

$$h_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{p-k} e^{-x}$$

Pour $p < n$, si $k \leq p$, $n - k > 0$ donc $0^{n-k} = 0$. Par somme, $h_n^{(p)}(0) = 0$.

(b) En reprenant le calcul précédent pour $p = n$, $L_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k}$.

On en déduit que L_n est un polynôme de degré au plus n .

Le coefficient de degré n est $\frac{1}{n!} \binom{n}{0} \frac{n!}{n!} (-1)^n = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Ce coefficient est non nul donc L_n est de degré n et son coefficient dominant est $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Q15. On exprime $\int_0^\infty g h_n^{(n)}$ et non le produit scalaire de g et $h_n^{(n)}$.

g et $h_n^{(n-1)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$. Avec l'expression obtenue en 14.a) et par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) h_n^{(n-1)}(x) = 0$. On peut donc utiliser une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} g(x) h_n^{(n)}(x) dx = [g(x) h_n^{(n-1)}(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} g'(x) h_n^{(n-1)}(x) dx$$

$h_n^{(n-1)}(0) = 0$ donc

$$\int_0^{+\infty} g(x) h_n^{(n)}(x) dx = - \int_0^{+\infty} g'(x) h_n^{(n-1)}(x) dx$$

On effectue ainsi n intégration par parties pour obtenir :

$$\int_0^{+\infty} g(x) h_n^{(n)}(x) dx = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(x) h_n(x) dx$$

$\langle g | L_n \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g(x) h_n^{(n)}(x) dx$ donc

$$\langle g | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(x) x^n e^{-x} dx$$

Q16. En utilisant la question précédente, $\langle L_i | L_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} L_i^{(j)}(t) L_j(t) dt$.

$\deg L_i = i < j$ donc $L_i^{(j)} = 0$ et $\langle L_i | L_j \rangle = 0$.

Q17. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. Cette intégrale existe bien car il s'agit du produit scalaire $\langle 1 | X^n \rangle$.

Avec une intégration par partie justifiée comme ci-dessus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n I_{n-1}$ puis, par récurrence sur n , $I_n = n! I_0$. Or $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!.$$

$$\text{D'après la question 15, } \langle L_n | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt.$$

L_n est de degré n et de coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!}$ donc $L_n^{(n)} = (-1)^n$. Par conséquent,

$$\langle L_n | L_n \rangle = 1$$

Q18. Les L_i sont deux à deux orthogonaux et de norme 1. Le cardinal de cette famille de $\mathbb{R}_n[X]$ est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après la question 10, pour $g \in E$,

$$P_F(g) = \sum_{i=0}^n \langle g | L_i \rangle L_i$$

Q19. Soit $g \in E$.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ d'après la question 10, } \sum_{i=0}^n \langle g | L_i \rangle^2 \leq \|g\|^2.$$

La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum \langle g | L_n \rangle^2$ est donc majorée ; on en déduit qu'elle converge :

$$\sum_{n \geq 0} \langle g | L_n \rangle^2 \text{ converge et sa somme est majorée par } \|g\|^2.$$

Q20. Soit $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > -\frac{1}{2}$.

g_α est continue sur I .

Pour $t \in I, g_\alpha(t)^2 e^{-t} = e^{-(2\alpha+1)t}$ avec $2\alpha+1 > 0$ donc $t \mapsto g_\alpha(t)^2 e^{-t}$ est intégrable sur I et $g_\alpha \in I$.

$$\text{On a d'une part } \|g_\alpha\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-(2\alpha+1)t} dt = \frac{1}{2\alpha+1}.$$

D'autre part, d'après Q15, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle g_\alpha | L_n \rangle &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g_\alpha^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} (-\alpha)^n t^n e^{-(\alpha+1)t} dt \\ &= \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1} n!} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du \quad (u = (\alpha+1)t) \\ &= \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^n \end{aligned}$$

D'après Q19, on sait que $\sum \langle g_\alpha | L_n \rangle^2$ est une série convergente ; par ailleurs il s'agit d'une série géométrique donc on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 &= \frac{1}{(\alpha+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}} \\ &= \frac{1}{(\alpha+1)^2 - \alpha^2} \\ &= \frac{1}{2\alpha+1} \end{aligned}$$

Finalement, on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$$