

EXERCICE I – Réduction et calculs de puissances

Il semblerait que le sujet note implicitement I la matrice identité I_3 et n un entier naturel.

Q1. J ayant trois colonnes identiques non nulles, $\text{rg } J = 1$.

La diagonalisabilité de J ne laisse aucun doute : elle est symétrique et réelle. On a donc 0 valeur propre d'ordre 2 car J diagonalisable et $\dim E_0(J) = \dim \ker J = 3 - \text{rg } J = 2$ et une autre valeur propre simple obtenue en calculant

$\text{tr } J = 3$. Finalement, J est semblable à $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q2. Notons P une matrice de passage de diagonalisation de J . On a $A = aJ + bI = P(aD + bI)P^{-1}$ donc

$$A \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3a + b \end{pmatrix}.$$

Q3. Comme A est diagonalisable et $\text{Sp } A = \{b, 3a + b\}$ avec $b \neq 3a + b$, $\pi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp } A} (X - \lambda) = (X - b)(X - 3a - b)$.

Q4. a) Soient Q_n et $R_n = \alpha_n + \beta_n X$ le quotient et le reste de la division euclidienne de X^n par π_A . Alors

$$X^n = \pi_A Q_n + \alpha_n + \beta_n X.$$

En évaluant en b et en $\lambda = 3a + b \neq b$, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_n + \beta_n b = b^n \\ \alpha_n + \beta_n \lambda = \lambda^n \end{cases}$$

Comme $\lambda \neq b$, on en tire

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{\lambda b^n - b \lambda^n}{\lambda - b} = \frac{\lambda b^n - b \lambda^n}{3a} \\ \beta_n = \frac{\lambda^n - b^n}{\lambda - b} = \frac{\lambda^n - b^n}{3a} \end{cases}$$

Finalement, comme $\pi_A(A) = 0_3$, $A^n = R_n(A) = \alpha_n I_3 + \beta_n A$, donc $A^n = \frac{\lambda b^n - b \lambda^n}{3a} I + \frac{\lambda^n - b^n}{3a} A$.

b) On montre par récurrence que pour tout $k \geq 1$, $J^k = 3^{k-1} J$. C'est en effet bien le cas pour $k = 1$, on calcule $J^2 = 3J$ donc c'est aussi le cas pour $k = 2$ et si $k \geq 1$ est tel que $J^k = 3^{k-1} J$, alors $J^{k+1} = 3^{k-1} J^2 = 3^k J$ ce qui établit la récurrence.

Comme les matrices I et J commutent, on calcule avec la formule du binôme de Newton,

$$A^n = (aJ + bI)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} J^k = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} J + b^n I = \frac{(3a+b)^n - b^n}{3} J + b^n I$$

On peut bien sûr vérifier en remplaçant A par $aJ + bI$ dans la première que les deux expressions de A^n sont équivalentes.

EXERCICE II – Matrices et déterminants circulants

Q5. Comme $j \neq 1$, $1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$. On a $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, $j^4 = j$ et $j^2 = -1 - j$.

Si $P = 2 - X + X^2$, Alors

$$P(j)P(j^2) = (2 - j + j^2)(2 - j^2 + j) = (1 - 2j)(3 + 2j) = 3 - 4j - 4j^2 = 7.$$

donc $P(j)P(j^2) \in \mathbb{R}$.

En réalité, on a $j^2 = \bar{j}$. Donc si P est n'importe quel polynôme à coefficient réel, alors

$$P(j)P(j^2) = P(j)P(\bar{j}) = P(j)\overline{P(j)} = |P(j)|^2 \in \mathbb{R} \dots$$

On peut résoudre complètement le problème (*) avec cet argument : les racines n^e de l'unité $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ sont deux à deux conjuguées (car racines du polynôme réel $X^n - 1$) sauf éventuellement -1 lorsque n est pair.

C'est donc aussi le cas de $P(\omega_1), \dots, P(\omega_{n-1})$ sauf éventuellement le réel $P(-1)$.

En rassemblant les termes complexes non réels et leur conjugué, on tire $P(\omega_1) \times \dots \times P(\omega_{n-1}) \in \mathbb{R}$.

Le sujet propose de retrouver ce résultat par une autre méthode.

Q6. On effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + XC_2 + X^2C_3 - \dots + X^{n-1}C_n$, puis on développe par rapport à la première colonne. On obtient

$$\chi_J = \begin{vmatrix} X & -1 & & (0) \\ & X & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ (0) & & & X & -1 \\ -1 & & & & X \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & & (0) \\ & X & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ (0) & & & X & -1 \\ X^n - 1 & & & & X \end{vmatrix}_n = (-1)^{n+1} (X^n - 1) \begin{vmatrix} -1 & & (0) \\ X & -1 & \\ & \ddots & \ddots \\ (0) & & X & -1 \end{vmatrix}_{n-1},$$

d'où on tire $\chi_J = X^n - 1$.

Q7. On remarque que $A = a_0 I_n + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1} = P(J)$.

Q8. Comme χ_J est scindé à racines simples, de spectre $\mathbb{U}_n = \{\omega_k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$,

$$J \text{ est semblable à } \text{diag}(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$$

donc

$$A = P(J) \text{ est semblable à } \text{diag}(P(\omega_0), \dots, P(\omega_{n-1})).$$

Q9. On a alors, comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) = \det A \in \mathbb{R}$.

Si $P(1) \neq 0$, on en déduit que $\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) = \frac{\det A}{P(1)} \in \mathbb{R}$.

Supposons désormais que $P(1) = 0$. Avec la question précédente, on a

$$\chi_A = \prod_{k=0}^{n-1} (X - P(\omega_k)) = X \prod_{k=1}^{n-1} (X - P(\omega_k)) \in \mathbb{R}[X].$$

Or le coefficient de degré 1 dans χ_A vaut $(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k)$ donc $\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) \in \mathbb{R}$.

PROBLÈME – Polynômes de Laguerre

Q10. a) Soit $x \in E$, et $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$ base orthonormale de F .

Alors $y = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i \in F$ et pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\langle x - y | e_j \rangle = \langle x | e_j \rangle - \langle y | e_j \rangle$. Or $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de F et $y \in F$, donc $\langle y | e_j \rangle$ est la coordonnée de y selon e_j , c'est-à-dire $\langle x | e_j \rangle$. Donc $\langle x - y | e_j \rangle = 0$ et $x - y \in F^\perp$.

Par unicité, $y = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i = p_F(x).$

b) Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de F , $\|p_F(x)\|^2$ est la somme des carrés des coordonnées de $p_F(x)$ dans $\mathcal{B}$ et, par théorème de Pythagore, comme $p_F(x) \perp x - p_F(x)$,

$$\|x\|^2 = \|p_F(x) + x - p_F(x)\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$$

d'où l'inégalité de Bessel $\sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2 = \|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2.$

Q11. En développant $(|a| - |b|)^2 \geq 0$, on obtient l'inégalité classique $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$

Soient f et g deux fonctions de E . Alors la fonction $h : t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est continue sur $I = \mathbb{R}^+$ par opérations et pour tout $t \in I$,

$$|h(t)| = |f(t)g(t)|e^{-t} \leq \frac{1}{2}(f(t))^2e^{-t} + \frac{1}{2}(g(t))^2e^{-t}$$

où le membre de droite définit une fonction intégrable sur I par définition de E et car $\mathcal{L}^1(I)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, donc, par comparaison, $h \in \mathcal{L}^1(I).$

Q12. On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}).$

- $E \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$;
- $E \neq \emptyset$ car contient la fonction nulle;
- Si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est une fonction continue telle que pour tout $t \in I$,

$$(f(t) + \lambda g(t))^2 e^{-t} = (f(t))^2 e^{-t} + 2\lambda f(t)g(t)e^{-t} + \lambda^2 (g(t))^2 e^{-t}$$

donc $t \mapsto (f(t) + \lambda g(t))^2 e^{-t} \in \mathcal{L}^1(I)$ par définition de E , par la question précédente, et par linéarité.

Montrons maintenant que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E.$

Bonne définition Si $f, g \in E$, la question précédente assure la convergence de l'intégrale définissant le réel $\langle f | g \rangle$.

Symétrie Si $f, g \in E$, on a bien $\langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle$.

Bilinéarité Si $f_1, f_2, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle f_1 + \lambda f_2 | g \rangle = \langle f_1 | g \rangle + \lambda \langle f_2 | g \rangle$ par linéarité de l'intégrale.

Cela donne la linéarité à gauche du produit scalaire, la linéarité à droite en découle par symétrie.

Défini-positivité Si $f \in E$, $\langle f | f \rangle \geq 0$ par positivité de l'intégrale, et si $\langle f | f \rangle = 0$, comme la fonction $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$ est continue et positive sur I ,

$$\forall t \geq 0, \quad (f(t))^2 \underbrace{e^{-t}}_{>0} = 0$$

donc $f = 0_E$.

Q13. Les fonctions polynomiales de degré au plus n sont bien des fonctions continues sur I . De plus, si f en est une, $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$ est une fonction continue sur I telle que $(f(t))^2 e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ par croissances comparées. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ comme fonction de Riemann avec $2 > 1$, on a bien $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$ intégrable sur I .

Ainsi, $F \subset E$ et comme, par ailleurs, $(F, +, \cdot)$ a une structure connue de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,

F est bien un sous-espace vectoriel de E .

Le « ainsi » du sujet est surprenant : on nous demande de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E pour définir le produit scalaire sur... $\mathbb{R}[X]$?

Q14. a) Supposons $p \leq n$. On utilise la formule de Leibniz avec $f_n : x \mapsto x^n$ et $g : x \mapsto e^{-x}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il vient

$$h_n^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f_n^{(k)} g^{(p-k)} : x \mapsto \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{p-k} x^{n-k} e^{-x}$$

donc
$$h_n^{(p)} = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} h_{n-k}.$$

Comme pour tout $n \geq 1$, $h_n(0) = 0$, on a, pour $p < n$, comme $k \leq p < n$, $n-k \neq 0$ donc $h_n^{(p)}(0) = 0$.

b) Avec la question précédente, on tire que

$$L_n : x \mapsto \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} e^{-x} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{\binom{n}{k}}{(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{k!} x^k$$

en ayant effectué le changement d'indice $k \mapsto n-k$ dans la dernière somme.

On a alors $L_n \in \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$, $\deg L_n = n$ et $\text{cd } L_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Q15. Il y a une erreur d'énoncé. Le sujet veut sans doute nous faire exprimer $\int_0^{+\infty} g \times h_n^{(n)}$ (et non $\langle g | h_n^{(n)} \rangle$) en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)} \times h_n$.

Posons $J_k = \int_0^{+\infty} g^{(n-k)} \times h_n^{(k)}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Par intégration par parties, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\int_0^x g^{(n-k)} \times h_n^{(k)} = \left[g^{(n-k)} \times h_n^{(k-1)} \right]_0^x - \int_0^x g^{(n-k+1)} \times h_n^{(k-1)}.$$

Or $\left[g^{(n-k)}(t) \times h_n^{(k-1)}(t) \right]_0^x = g^{(n-k)}(x) \times h_n^{(k-1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées (de la forme polynôme multiplié par e^{-x}), donc, en faisant $x \rightarrow +\infty$ dans l'intégration par parties,

$$J_k = -J_{k-1}.$$

On a alors $J_n = (-1)^n J_0$, donc $\int_0^{+\infty} g \times h_n^{(n)} = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)} \times h_n$.

On a enfin $\langle g | L_n \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g \times h_n^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)} \times h_n$.

Q16. Supposons $i < j \leq n$ afin que $L_i, L_j \in F = \mathbb{R}_n[X]$ **ce qui n'a aucune importance ici, l'énoncé est surprenant...**

Alors, d'après la question précédente applicable à l'entier j à la place de n et avec $g = L_i$,

$$\langle L_i | L_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} L_i^{(j)} \times h_j = \boxed{0}$$

car L_i est un polynôme de degré $i < j$.

Q17. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. Par intégration par parties, si $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \geq 1$, on a

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt = \left[-t^n e^{-t} \right]_0^x + n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt.$$

Or

$$\left[-t^n e^{-t} \right]_0^x = -x^n e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées.

On en déduit que $\forall n \geq 1$, $I_n = nI_{n-1}$. On en tire $I_n = n!I_0$ avec $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1$.

On a donc $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

On calcule alors, toujours en utilisant **Q15** avec cette fois $g = L_n$ polynôme de degré n ,

$$\langle L_n | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t) \times t^n e^{-t} dt = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} n! \text{cd } L_n \times t^n e^{-t} dt = \frac{1}{n!} I_n$$

donc $\langle L_n | L_n \rangle = 1$.

Q18. Des deux questions précédentes, on tire que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ constituée de $n+1 = \dim F$ vecteurs de $F = \mathbb{R}_n[X]$ en est une **base orthonormale**. On a donc, pour tout $g \in E$, $p_F(g) = \sum_{i=0}^n \langle g | L_i \rangle L_i$.

Q19. D'après l'inégalité de Bessel remontrée en début de problème et la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^n \langle g | L_i \rangle^2 \leq \|g\|^2$. La série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} \langle g | L_n \rangle^2$ a donc toutes ses sommes partielles majorées par $\|g\|^2$.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \langle g | L_n \rangle^2$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g | L_n \rangle^2 \leq \|g\|^2$.

Q20. Encore une étrangeté du sujet : on définit g_α pour $\alpha > -\frac{1}{2}$, puis on nous fait étudier g_α pour $\alpha \in \mathbb{R} \dots$

Soit, donc, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors g_α est continue sur I et $t \mapsto (g_\alpha(t))^2 e^{-t} = e^{(-2\alpha-1)t}$ est intégrable sur $I = [0, +\infty[$ si et seulement si $-2\alpha - 1 < 0$ c'est-à-dire $\alpha > -\frac{1}{2}$ par critère d'intégrabilité des fonctions exponentielles.

Ainsi, $g_\alpha \in E$ si et seulement si $\alpha > -\frac{1}{2}$. **C'est donc bien une nouvelle erreur d'énoncé.**

On suppose désormais que $\alpha > -\frac{1}{2}$. On calcule, à l'aide de la question **Q15**,

$$\langle g_\alpha | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g_\alpha^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt = \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-(\alpha+1)t} dt = \frac{\alpha^n}{n!(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha+1} \right)^n e^{-u} du$$

en ayant posé $u = (\alpha+1)t$ dans la dernière intégrale, avec $\alpha+1 > \frac{1}{2} > 0$.

De la question **Q17**, on tire $\langle g_\alpha | L_n \rangle = \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}}$.

Comme somme de série géométrique convergente d'après la question précédente, on calcule ensuite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \frac{1}{(\alpha+1)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2} \right)^n = \frac{1}{(\alpha+1)^2} \times \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}} = \frac{1}{(\alpha+1)^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha+1}.$$

Parallèlement, on a $\|g_\alpha\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-(2\alpha+1)t} dt = \frac{1}{2\alpha+1}$.

Finalement, on a bien $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$ donc la majoration de la question précédente est optimale.

FIN