

MATHÉMATIQUES

– une proposition de correction –

EXERCICE 1 – Réduction de matrices par blocs

Partie I – Étude d'une première forme

I.1 – Étude d'un exemple

Q1. Puisque A est une matrice diagonale, elle est, en particulier, symétrique (et à coefficients réels), donc :

$$M^T = \begin{pmatrix} A^T & A^T \\ A^T & A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} = M$$

M est donc une matrice symétrique réelle : par le théorème spectral, M est diagonalisable.

Q2. Puisque la troisième colonne de M coïncide avec sa première, et comme la quatrième colonne de M est identique à sa deuxième, on justifie rapidement que $\text{rg}(M) = 2$ (les deux premières colonnes de M étant linéairement indépendantes). Par la formule du rang, on en déduit que $\dim(\text{Ker}(M)) = 2$, si bien que 0 est une valeur propre de M , et, comme M est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de 0 en tant que valeur propre de M vaut : $\dim(E_0(M)) = 2$.

De plus, puisque $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on montre facilement que $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et donc $2 \in \text{Sp}(M)$, et aussi $\dim(E_M(2)) \geq 1$.

De même, on déduit de l'égalité $A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que $M \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $4 \in \text{Sp}(M)$ et $\dim(E_M(4)) \geq 1$.

Ainsi $\dim(E_M(0)) + \dim(E_M(2)) + \dim(E_M(4)) \geq 2 + 1 + 1 = 4$...

mais, d'autre part, $\dim(E_M(0)) + \dim(E_M(2)) + \dim(E_M(4)) \leq 4$.

Par conséquent, $\dim(E_M(0)) + \dim(E_M(2)) + \dim(E_M(4)) = 4$, ce qui entraîne les égalités :

$$\dim(E_M(2)) = 1 = \dim(E_M(4)), \text{ et } \text{Sp}(M) = \{0, 2, 4\}$$

Q3. Puisque $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$, M est une matrice symétrique positive... et comme 0 est une valeur propre de M , M n'est pas définie positive.

I.2 – Réduction de la matrice M

Q4. Par un simple calcul matriciel, on constate que $P \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2I_n & O_n \\ O & 2I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$.

Par conséquent, la matrice P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$.

Q5. Un nouveau calcul matriciel permet d'obtenir :

$$P^{-1}MP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} O_n & 2A \\ O_n & 2A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_n & O_n \\ O_n & 2A \end{pmatrix}$$

Ainsi, M est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} O_n & O_n \\ O_n & 2A \end{pmatrix}$.

Q6. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda I_n - A & -A \\ -A & \lambda I_n - A \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda I_n - A & -A \\ \lambda I_n - 2A & \lambda I_n - 2A \end{vmatrix} \text{ en effectuant les opérations } L_i \leftarrow L_i + L_{i-n}, \text{ pour tout } i \in \llbracket n+1; 2n \rrbracket \\
&= \begin{vmatrix} \lambda I_n & -A \\ O_n & \lambda I_n - 2A \end{vmatrix} \text{ en effectuant les opérations } C_i \leftarrow C_i - C_{i+n}, \text{ pour tout } i \in \llbracket 1; n \rrbracket \\
&= \det(\lambda I_n) \times \det(\lambda I_n - 2A) \text{ car le déterminant précédent est triangulaire par blocs} \\
&= \lambda^n \det(I_n) \times 2^n \det\left(\frac{\lambda}{2} I_n - A\right) \text{ par } n\text{-linéarité du déterminant} \\
&= \lambda^n 2^n \chi_A\left(\frac{\lambda}{2}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \iff \chi_M(\lambda) = 0 \iff \lambda^n 2^n \chi_A\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } \frac{\lambda}{2} \in \mathrm{Sp}(A)$$

Finalement, $\mathrm{Sp}(M) = \{2\lambda; \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} \cup \{0\}$.

Q7. • *Montrons que (i) $\implies$ (ii)*

Supposons donc que Q est un polynôme annulateur de A et que $Q(0) = 0$.

Comme on vérifie facilement que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{2}D\right)^k = \begin{pmatrix} O_n^k & O_n \\ O_n & A^k \end{pmatrix}$, il vient :

$$Q\left(\frac{1}{2}D\right) = \sum_{k=0}^d q_k \left(\frac{1}{2}D\right)^k = \sum_{k=0}^d q_k \begin{pmatrix} O_n^k & O_n \\ O_n & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^d q_k O_n^k & O_n \\ O_n & \sum_{k=0}^d q_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(O_n) & O_n \\ O_n & Q(A) \end{pmatrix}$$

Puisque $Q(A) = O_n$, et comme $Q(0) = 0$, ce qui entraîne $q_0 = 0$, et donc $Q(O_n) = q_0 I_n = O_n$, on déduit du calcul précédent que $Q\left(\frac{1}{2}D\right) = O_{2n}$: $Q\left(\frac{X}{2}\right)$ est donc un polynôme annulateur de D .

• *Montrons que (ii) $\implies$ (i)*

Si $Q\left(\frac{X}{2}\right)$ est donc un polynôme annulateur de D , alors, en reprenant le calcul ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} Q(O_n) & O_n \\ O_n & Q(A) \end{pmatrix} = O_{2n}$$

En particulier, $Q(O_n) = Q(A) = O_n$.

Par conséquent, Q est un polynôme annulateur de A , et comme $Q(O_n) = q_0 I_n$, l'égalité $Q(O_n) = O_n$ implique $q_0 = 0$, autrement dit $Q(0) = 0$.

Q8. • Supposons M diagonalisable : il existe alors un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines toutes simples annulateur de M .

Comme M et D sont semblables, on en déduit facilement que Q est aussi un polynôme annulateur de D .

Considérons alors le polynôme $R = Q(2X)$: celui-ci est encore scindé à racines toutes simples (il suffit d'expliciter Q sous forme factorisée pour s'en convaincre), et vérifie $R\left(\frac{1}{2}D\right) = Q(D) = O_{2n}$.

Par **Q7.**, on en déduit que $R(A) = O_n$: R est donc un polynôme annulateur de A , et comme R est scindé à racines toutes simples, on en déduit que A est diagonalisable.

• Supposons A diagonalisable : il existe alors un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines toutes simples annulateur de A .

Si $Q(0) \neq 0$, le polynôme XQ est également scindé à racines toutes simples (puisque 0 n'est alors pas racine de Q), et est « encore » un polynôme annulateur de A : on peut donc, quitte à remplacer Q par XQ , supposer que $Q(0) = 0$.

Par conséquent, d'après **Q7.**, le polynôme $R = Q\left(\frac{X}{2}\right)$ est un polynôme annulateur de D , scindé à racines toutes simples... et comme D et M sont semblables, on en déduit que R est aussi un polynôme annulateur de M .

Par conséquent, M est diagonalisable.

Partie II : Étude d'une seconde forme

Q9. Raisonnons par récurrence en notant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k) : M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ O_n & A^k \end{pmatrix}$.

- $M^0 = I_{2n}$ et $\begin{pmatrix} A^0 & 0A^0 \\ O_n & A^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Alors :

$$M^{k+1} = M^k \times M = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ O_n & A^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & A \\ O_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^k \times A & A^k \times A + kA^k \times A \\ O_n & A^k \times A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^{k+1} \\ O_n & A^{k+1} \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ O_n & A^k \end{pmatrix}$.

Q10. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, en écrivant $Q = \sum_{k=0}^d q_k X^k$, il vient :

$$Q(M) = \underbrace{\sum_{k=0}^d q_k M^k}_{\text{d'après Q9.}} = \sum_{k=0}^d q_k \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ O_n & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^d q_k A^k & \sum_{k=0}^d q_k kA^k \\ \sum_{k=0}^d q_k O_n & \sum_{k=0}^d q_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(A) & AQ'(A) \\ O_n & Q(A) \end{pmatrix}$$

Q11. Commençons par observer que, puisque $S(M) = O_{2n}$, d'après l'explicitation vue en **Q10.**, $S(A) = O_n$, donc A possède un polynôme annulateur scindé à racines toutes simples, et donc A est diagonalisable. Il existe donc une matrice inversible $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B^{-1}AB = C$.

Écrivons alors $S' = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. Ainsi, $S'(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k$, et donc :

$$B^{-1}S'(A)B = \sum_{k=0}^d a_k B^{-1}A^k B = \sum_{k=0}^d a_k (B^{-1}AB)^k = \sum_{k=0}^d a_k C^k$$

Puisque C est une matrice diagonale, pour tout $k \in \mathbb{N}$, C^k est diagonale, donc $\sum_{k=0}^d a_k C^k$ aussi. Ainsi, $S'(A)$ est diagonalisable.

De plus, en écrivant $C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, par les calculs précédents, il vient :

$$B^{-1}S'(A)B = \sum_{k=0}^d a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^d a_k \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=0}^d a_k \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S'(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & S'(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\text{Sp}(S'(A)) = \{S'(\lambda) ; \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

Q12. On vient de justifier que les valeurs propres de $S'(A)$ sont les réels de la forme $S'(\lambda)$, où λ est une valeur propre de A .

Comme S est un polynôme annulateur de A (vu au début de **Q11.**), pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, λ est racine de S , et puisque les racines de S sont toutes simples, $S'(\lambda) \neq 0$.

On vient de justifier que 0 n'est pas une valeur propre de $S'(A)$: $S'(A)$ est donc une matrice inversible.

Or $S(M) = \begin{pmatrix} S(A) & AS'(A) \\ O_n & S(A) \end{pmatrix}$: puisque cette matrice est nulle, en particulier, $AS'(A) = O_n$, et comme $S'(A)$ est inversible, on en déduit que $A = O_n$.

Partant de l'hypothèse (formulée en préambule de **Q11.**) que M est diagonalisable, on vient de montrer que $A = O_n$.

Réciproquement, si $A = O_n$, alors $M = O_{2n}$, donc M est diagonalisable (car diagonale).

Finalement, M est diagonalisable si et seulement si $A = O_n$.

EXERCICE 2 – Autour de la loi géométrique

Partie I – Étude de la variable aléatoire S_n

Q13. Puisque, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_k(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $S_n(\Omega) = \{k \in \mathbb{N}; k \geq n\}$.

Q14. Puisque $X_1 \sim \mathcal{G}(p)$, $E(X_1) = \frac{1}{p}$ et $V(X_1) = \frac{1-p}{p^2}$.

Comme, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, X_k suit la même loi que X_1 , on en déduit :

$$\begin{cases} E(S_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \frac{n}{p} & \text{par linéarité de l'espérance} \\ V(S_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = \frac{n(1-p)}{p^2} & \text{par indépendance de } X_1, \dots, X_n \end{cases}$$

Q15. Puisque $((Y=0), \dots, (Y=n), \dots)$ est un système complet d'événements, la série $\sum P(Y=n)$ est convergente (et sa somme vaut 1) : la série entière $\sum_{k \geq 0} P(Y=k)t^k$ a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

Q16. Comme, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_k \sim \mathcal{G}(p)$, $G_{X_k} : t \mapsto \frac{pt}{1-qt}$.

Puisque $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, pour tout $t \in]-1; 1[$:

$$G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t) \times \cdots \times G_{X_n}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt} \right)^n$$

Q17. On connaît le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=n-1}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-(n-1)+1) x^{k-(n-1)} = \sum_{k=n-1}^{+\infty} \binom{k}{n-1} x^{k-(n-1)}$$

Par conséquent, pour tout $t \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} (pt)^n (1-qt)^{-n} &= \frac{(pt)^n}{(1-qt)^n} \\ &= (pt)^n \sum_{k=n-1}^{+\infty} \binom{k}{n-1} (qt)^{k-(n-1)} \\ &= \sum_{k=n-1}^{+\infty} \binom{k}{n-1} p^n q^{k-(n-1)} t^{k+1} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} t^k \end{aligned}$$

De plus, par définition de G_{S_n} , pour tout $t \in]-1; 1[$:

$$(pt)^n (1-qt)^{-n} = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k) t^k}_{S_n(\Omega) = \{k \in \mathbb{N}; k \geq n\}} = \sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k) t^k$$

On en déduit, par unicité du développement en série entière, que, pour tout entier $k \geq n$:

$$P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

Partie II – Loi de la variable aléatoire V_n

Q18. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(X_1 > k) = \bigcup_{\ell \geq k+1} (X_1 = \ell)$, donc, puisque les événements de la forme $(X_1 = \ell)$ (où $\ell \geq k+1$) sont deux à deux incompatibles :

$$P(X_1 > k) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} P(X_1 = \ell) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} q^{\ell-1} p = p \sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+k} = pq^k \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{pq^k}{1-q} = q^k$$

Q19. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(V_n \leq k) = \bigcap_{1 \leq j \leq n} (X_j \leq k) = \bigcap_{1 \leq j \leq n} \overline{(X_j > k)}$, donc, par indépendance de $X_1, \dots, X_n$:

$$P(V_n \leq k) = \prod_{j=1}^n P(\overline{(X_j > k)}) = \prod_{j=1}^n (1 - P(X_j > k)) = (1 - q^k)^n$$

Q20. Puisque V_n est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, V_n possède une espérance éventuellement infinie, et :

$$E(V_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(V_n \geq k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(V_n \geq \ell + 1) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(V_n > \ell) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 - P(V_n \leq \ell))$$

Comme, d'après **Q19.**, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $P(V_n \leq \ell) = (1 - q^\ell)^n$ (égalité valable aussi pour $\ell = 0$) :

$$1 - P(V_n \leq \ell) = 1 - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-q^\ell)^i = nq^\ell - \underbrace{\sum_{i=2}^n \binom{n}{i} (-q^\ell)^i}_{\text{car } q^\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0} = nq^\ell + o(q^\ell) \underset{\ell \rightarrow +\infty}{\sim} nq^\ell$$

Comme $0 < q < 1$, $\sum q^\ell$ est une série géométrique convergente, donc $\sum nq^\ell$ converge aussi, puis, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum (1 - P(V_n \leq \ell))$ est convergente.

Par conséquent, V_n est d'espérance finie et $E(V_n) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 - (1 - q^\ell)^n)$.

Q21. Comme on l'a précédemment évoqué, $V_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(V_n \leq k) = (V_n \leq k-1) \cup (V_n = k)$ (dans le cas où $k = 1$, $(V_n \leq k-1) = (V_n \leq 0)$ est l'événement impossible, et l'égalité demeure valable).

Puisque $(V_n \leq k-1)$ et $(V_n = k)$ sont incompatibles, $P(V_n \leq k) = P(V_n \leq k-1) + P(V_n = k)$, et donc :

$$P(V_n = k) = P(V_n \leq k) - P(V_n \leq k-1) = (1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n$$

Cette égalité est encore vraie pour $k = 1$ (même si l'égalité $P(V_n \leq k-1) = (1 - q^{k-1})^n$ n'avait pas été précédemment justifiée pour $k = 1$... elle est pourtant clairement vraie).

Partie III – Équivalent de l'espérance de V_n

Q22. • Pour tout $x \geq 0$, $q^x = \exp(x \ln(q))$, et comme $q \in]0; 1[$, $\ln(q) < 0$, donc $x \mapsto x \ln(q)$ est décroissante sur $[0; +\infty[$.

Par croissance de $\exp$, $x \mapsto \exp(x \ln(q))$ est décroissante sur $[0; +\infty[$, et donc $x \mapsto 1 - \exp(x \ln(q))$ est croissante sur $[0; +\infty[$ et à valeurs dans $[0; 1]$.

Or $t \mapsto t^n$ est croissante sur $[0; 1[$: $x \mapsto (1 - q^x)^n$ est donc croissante sur $[0; +\infty[$, si bien que la fonction φ_n est décroissante sur $[0; +\infty[$.

• φ_n est continue et positive sur $[0; +\infty[$.

De plus, puisque $0 < q < 1$, $q^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc :

$$\varphi_n(x) = 1 - (1 - q^x)^n \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - (1 - nq^x + o(q^x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} nq^x + o(q^x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} nq^x = n \exp(x \ln(q))$$

Comme $\ln(q) < 0$, $\int_0^{+\infty} \exp(x \ln(q)) dx$ est convergente, donc $\int_0^{+\infty} n \exp(x \ln(q)) dx$ aussi.

Par comparaison de fonctions positives, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx$ converge aussi, donc, comme φ_n est à valeurs positives, φ_n est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Q23. Puisque φ_n est décroissante et continue sur $[0; +\infty[$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\underbrace{\int_k^{k+1} \varphi_n(t) dt}_{(1)} \leq \varphi_n(k)$ et, pour tout

$$k \geq 1, \underbrace{\varphi_n(k) \leq \int_{k-1}^k \varphi_n(t) dt}_{(2)}$$

Étant donné $K \in \mathbb{N}^*$, en sommant (1) de 0 à K et en sommant (2) de 1 à K , il vient, par la relation de Chasles :

$$\int_0^{K+1} \varphi_n(t) dt \leq \underbrace{\sum_{k=0}^K \varphi_n(k)}_{\text{en ajoutant } \varphi_n(0) \text{ de part et d'autre}} \leq \varphi_n(0) + \int_0^K \varphi_n(t) dt$$

Comme on a montré en **Q20.** que la série $\sum_{(k \geq 0)} \varphi_n(k)$ est convergente, et puisqu'on vient d'établir l'intégrabilité de φ_n sur $[0; +\infty[$, les trois quantités considérées ont une limite finie lorsque $K \rightarrow +\infty$, et donc, par passage à la limite dans une inégalité large :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(t) dt \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_n(k) = E(V_n) \leq \varphi_n(0) + \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) dt = 1 + \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) dt$$

Q24. Appliquons, comme indiqué, le changement de variable défini par $u = 1 - q^x$ à l'intégrale $\int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u} du$: puisque $x \mapsto 1 - q^x = 1 - \exp(x \ln(q))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (à valeurs dans $[0; 1[$), on peut écrire $du = -\ln(q) \exp(x \ln(q)) dx$ et les intégrales $\int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u} du$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - (1 - q^x)^n}{1 - (1 - q^x)} (-\ln(q) \exp(x \ln(q)) dx)$ ont la même nature.

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{1 - (1 - q^x)^n}{1 - (1 - q^x)} (-\ln(q) \exp(x \ln(q)) dx) = -\ln(q) \int_0^{+\infty} (1 - (1 - q^x)^n) dx$, cette dernière intégrale converge (vu en **Q22.**), donc $\int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u} du$ converge et :

$$\int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u} du = -\ln(q) \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx$$

Q25. Pour tout $u \in [0; 1[$, $\frac{1 - u^n}{1 - u} = \sum_{k=0}^{n-1} u^k$, donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u} du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 u^k du = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Puisque $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$, on déduit du travail précédent et de **Q24.** que :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{\ln(q)}$$

En particulier, $\int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et donc, comme, d'après **Q23.**, $0 \leq E(V_n) - \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) dt \leq 1$, on en déduit que $E(V_n) - \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_0^{+\infty} \varphi_n(t) dt\right)$, et donc :

$$E(V_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{\ln(q)}$$

EXERCICE 3 – Résolution d’une équation différentielle non ordinaire

Partie I – Généralités

Q26. S_λ est une partie de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et :

- la fonction $\tilde{0}$ identiquement nulle est dérivable, et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{0}'(x) = 0 = \tilde{0}(\lambda x)$, donc $\tilde{0} \in S_\lambda$;
- soient $(\nu, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in S_\lambda^2$: $\nu f + \mu g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\nu f + \mu g)'(x) = \nu f'(x) + \mu g'(x) = \nu f(\lambda x) + \mu g(\lambda x) = (\nu f + \mu g)(\lambda x)$$

Par conséquent, $\nu f + \mu g \in S_\lambda$.

S_λ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Q27. S_1 est l’ensemble des solutions de l’équation différentielle $y' = y$: donc $S_1 = \{x \mapsto \alpha \exp(x) ; \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Q28. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant (E_0) , alors f' est constante : f est donc une fonction affine.

Réciproquement, si f est une fonction affine, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f : x \mapsto ax + b$: f est alors dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(0.x)$ si et seulement si $a = b$.

Par conséquent, $S_0 = \{x \mapsto ax + a ; a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x \mapsto x + 1)$.

Q29. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant (E_{-1}) , alors la fonction f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$: par conséquent, f' est dérivable (puisque c’est la composée de f et de $x \mapsto -x$, qui sont toutes les deux dérivables), autrement dit f est deux fois dérivable, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f'(-x) = -f(-(-x)) = -f(x)$.

Par conséquent, $f'' + f = 0$... et donc f est de la forme $x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (résolution « usuelle » à l’aide de l’équation caractéristique).

Ainsi, si $f \in S_{-1}$, alors f est de la forme $x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Réciproquement, considérons une fonction f de la forme $x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: une telle fonction est dérivable, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$.

Ainsi, $f \in S_{-1}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{-\alpha \sin(x) + \beta \cos(x)}_{f'(x)} = \underbrace{\alpha \cos(-x) + \beta \sin(-x)}_{f(-x)} = \alpha \cos(x) - \beta \sin(x)$$

Autrement dit $f \in S_{-1}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\beta - \alpha)(\sin(x) - \cos(x)) = 0$. En évaluant, par exemple, cette dernière égalité en 0, on en déduit que $\beta - \alpha = 0$, ce qui est clairement une condition suffisante pour que ladite égalité soit valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Finalement, $S_{-1} = \{x \mapsto \alpha \cos(x) + \alpha \sin(x) ; \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\cos + \sin)$.

Partie II – Solutions développables en série entière

Q30. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $n \geq 0$,
$$\frac{\left| \lambda^{\frac{(n+1)n}{2}} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!} \right|} = \frac{|\lambda|^{\frac{(n+1)n}{2} - \frac{n(n-1)}{2}} \times |x|}{n+1} = \frac{|\lambda|^n \times |x|}{n+1} \leq \frac{|x|}{n+1}.$$
 puisque $-1 \leq \lambda \leq 1$.

Comme $\frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par convergence par encadrement,
$$\frac{\left| \lambda^{\frac{(n+1)n}{2}} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!} \right|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent, d’après la règle de d’Alembert, la série $\sum_{n \geq 0} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!}$ est (absolument) convergente, quelle que soit la valeur de $x \in \mathbb{R}$: le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!}$ est donc $+\infty$.

Q31. En tant que somme d’une série entière dont le rayon de convergence est infini, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\lambda^{\frac{(n+1)n}{2}}}_{=\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \times \lambda^n} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \times \frac{(\lambda x)^n}{n!} = \varphi(\lambda x)$$

Donc $\varphi \in S_\lambda$.

Q32. En tant que somme d’une série entière dont le rayon de convergence est infini, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour

$$\text{tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} (n+1) x^n.$$

Si f est solution de (E_λ) , alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^n x^n$.

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = \lambda^n a_n$.

Q33. D'après **Q32.**, si f est solution de (E_λ) , alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{\lambda^{n-1}}{n} \times a_{n-1} = \frac{\lambda^{n-1}}{n} \times \frac{\lambda^{n-2}}{n-1} \times a_{n-2} = \cdots = \underbrace{\frac{\lambda^{n-1}}{n} \times \frac{\lambda^{n-2}}{n-1} \times \cdots \times \frac{\lambda^0}{1}}_{= \frac{\lambda^{(n-1)+(n-2)+\cdots+0}}{n!}} a_0 = \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \times a_0$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \times a_0 \times \frac{x^n}{n!} = a_0 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!} \right) = a_0 \varphi(x)$, donc $f \in \text{Vect}(\varphi)$.

Réciproquement, si $f \in \text{Vect}(\varphi)$, on vérifie facilement que f est solution de (E_λ) , puisqu'on a vu que φ est solution de (E_λ) , et l'ensemble des solutions de (E_λ) est un espace vectoriel.

Finalement, f est solution de (E_λ) si et seulement si $f \in \text{Vect}(\varphi)$.

Partie III – Détermination de toutes les solutions

Q34. Raisonnons par récurrence et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(t) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n t)$ ».

- Puisque $f \in S_\lambda$, f est dérivable, et donc continue, et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(0)}(t) = f(t) = \lambda^{\frac{0 \times (0-1)}{2}} f(\lambda^0 t)$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : f est donc de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(t) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n t)$.
Puisque f est supposée dérivable (en tant que solution de (E_λ)), $t \mapsto \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n t)$ est dérivable : par l'égalité précédente, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(t) = \underbrace{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \times \lambda^n f'(\lambda^n t)}_{\text{car } f \in S_\lambda} = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \times \lambda^n f(\lambda \times \lambda^n t) = \underbrace{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2} + n}}_{= \lambda^{\frac{(n+1)n}{2}}} f(\lambda^{n+1} t)$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

On conclut par le principe de récurrence.

Q35. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $t \in [-a; a]$, puisque $x \in [-a; a]$, $(0 \leq) |x - t| \leq 2a$, donc $|(x - t)|^n \leq (2a)^n$.

D'autre part, d'après **Q34.**, pour tout $t \in [-a; a]$, $|f^{(n+1)}(t)| = \underbrace{\left| \lambda^{\frac{(n+1)n}{2}} \right| |f(\lambda^{n+1} t)|}_{\text{puisque } -1 \leq \lambda \leq 1} \leq |f(\lambda^{n+1} t)|$

Toujours parce que $-1 \leq \lambda \leq 1$, $|\lambda^{n+1} t| \leq |t| \leq a$. Puisque f est continue sur le segment $[-a; a]$, f est bornée sur cet intervalle, et il existe donc $A \in \mathbb{R}_+$ (indépendant de n) tel que, $t \in [-a; a]$, $|f(\lambda^{n+1} t)| \leq A$.

Ainsi, pour tout $t \in [-a; a]$, $|g_n(t)| \leq \frac{(2a)^n}{n!} \times A$: g_n est donc bornée, et $\|g_n\|_\infty \leq \frac{(2a)^n}{n!} \times A$.

Par croissances comparées, $\frac{(2a)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, puis, par convergence par encadrement, $\|g_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-a; a]$.

Q36. Comme $x \in [-a; a]$, (g_n) converge uniformément sur $[0; x]$ ou sur $[x; 0]$, donc $\int_0^x g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \int_0^x g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par conséquent, $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$... et ce, pour tout $x \in [-a; a]$, a étant un réel strictement positif quelconque : l'égalité précédente est donc valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a ainsi établi que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Q37. On a montré, dans cette troisième partie, que si $f \in S_\lambda$, alors f est développable en série entière, et donc, d'après la deuxième partie, $f \in \text{Vect}(\varphi)$: ainsi, $S_\lambda \subset \text{Vect}(\varphi)$.

La réciproque a déjà été évoquée en **Q33.**, donc $S_\lambda = \text{Vect}(\varphi)$: (φ) est donc une famille génératrice de S_λ , et comme elle est formée d'une seule fonction non nulle, elle est libre, et forme donc une base de S_λ .

En particulier, $\dim(S_\lambda) = 1$.