

EXERCICE 1 : Un jeu de pile ou face

- Q1.** • La fonction $(x \mapsto 1-x)$ est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle et la fonction $(x \mapsto 1/x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, donc par composée f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.
- On note pour $k \in \mathbb{N}$, H_k l'assertion :

$$<< \forall x \in] -1, 1[, \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} >>$$

Initialisation : H_0 est vraie car

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{0!}{(1-x)^{0+1}} = \frac{1}{1-x}$$

Hérédité : Supposons H_k vraie à un rang k et montrons que H_{k+1} est vraie.

Par hypothèse, on a

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

Donc

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} \left(k!(1-x)^{-(k+1)} \right) = k! \cdot -(k+1)(1-x)^{-(k+2)}(-1) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$$

Ainsi H_{k+1} est vraie.

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in] -1, 1[, \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}}$$

- Q2.** Le développement en série entière de f est :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Par le cours, on peut dériver k fois terme à terme ($k \in \mathbb{N}$) :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Avec **Q1**, on obtient l'égalité demandée :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in] -1, 1[, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}}$$

- Q3.** La variable aléatoire X est égale au rang d'obtention du premier succès ("Pile") au cours d'une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes.

X suit donc la loi géométrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$. Donc

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}}$$

- Q4.** Sachant $(X = n)$, le joueur 2 effectue n lancers indépendants, chacun avec une probabilité p d'obtenir "Pile". La variable Y (nombre de "Pile" obtenus par le joueur 2) suit alors une loi binomiale de paramètres n et p : $Y|(X = n) \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k | X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}}$$

Q5. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k|X = n)\mathbb{P}(X = n)$$

Puisque $\mathbb{P}(Y = k|X = n) = 0$ si $k > n$, la somme commence à $n = \max(1, k)$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=\max(1,k)}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot p(1-p)^{n-1}$$

Q6. En utilisant la formule de **Q5** pour $k = 0$:

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n \cdot p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{2n-1}$$

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^n$$

C'est une série géométrique avec $|(1-p)^2| < 1$. Donc :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{2p-p^2} = \boxed{\frac{1-p}{2-p}}$$

Q7. Toujours avec **Q5** :

$$P(Y = k) = p^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2n-k-1} = \frac{p^{k+1}}{k!} (1-p)^{-k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} ((1-p)^2)^n$$

En utilisant le résultat de **Q2** avec $x = (1-p)^2$ et $|x| < 1$, on a :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} ((1-p)^2)^n = \frac{k!}{(1-(1-p)^2)^{k+1}}$$

Ainsi :

$$P(Y = k) = \frac{p^{k+1}(1-p)^{2k}}{(1-p)^{k+1}(p(2-p))^{k+1}} = \boxed{\frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}}$$

EXERCICE 2 : la fonction Gamma

Q8 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Notons, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$.

- f_x est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$; les seuls problèmes d'intégrabilité sont en 0 et en $+\infty$.
- Au voisinage de 0, $0 \leq f_x(t) \sim t^{x-1}$ donc, par critère de Riemann,

$$\int_0^1 f_x \text{ converge} \iff 1-x < 1 \iff x > 0$$

- Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) = o(1/t^2)$ car, par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1} e^{-t} = 0$ donc $\int_1^{+\infty} f_x$ converge.
- Conclusion : Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

- De plus, pour tout réel $x > 0$, f_x est une fonction continue, positive ou nulle et non identiquement nulle (elle est même strictement positive) sur $]0, +\infty[$, donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) > 0}$$

Q9 Soit $x > 0$. Alors $x + 1 > 0$ et pour $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, une intégration par parties donne

$$\int_a^b e^{-t} t^x dt = [-e^{-t} t^x]_a^b + x \int_a^b e^{-t} t^{x-1} dt$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers l'infini (les différentes limites existent bien et valent 0 car $x > 0$), on a :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

Q10 Soient a et b des réels tels que $0 < a < 1 < b$, $x \in [a, b]$, et $t > 0$. On a

$$t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)} \times e^{-t}$$

On a $a-1 \leq x-1 \leq b-1$ et $0 < e^{-t} \leq 1$. Donc

- Si $t \in]0, 1]$ alors $\ln(t) \leq 0$ et $(b-1)\ln(t) \leq (x-1)\ln(t) \leq (a-1)\ln(t)$.

Par croissance de exp, on obtient $t^{x-1} \leq t^{a-1}$, puis $t^{x-1} e^{-t} \leq t^{a-1} e^{-t} \leq t^{a-1}$.

- Si $t \in]1, +\infty[$ alors $\ln(t) > 0$, donc on obtient $t^{x-1} e^{-t} \leq t^{b-1} e^{-t}$.

On a donc bien

$$\boxed{\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*, \quad t^{x-1} e^{-t} \leq \varphi(t)}$$

Q11 $\forall t > 0$, $\psi_0(t) = \varphi(t)$, $\psi_1(t) = |\ln t| \varphi(t)$, $\psi_2(t) = (\ln t)^2 \varphi(t)$.

- les fonctions ψ_0 , ψ_1 et ψ_2 sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Au voisinage de 0,**

$$\forall t \in]0, 1], \quad |\psi_k(t)| = |\ln t|^k t^{a-1} = o\left(\frac{1}{t^u}\right) \quad \text{si } u + a - 1 > 0$$

Choisissons u tel que $1 - a < u < 1$. Alors on a

$$|\psi_k(t)| = o\left(\frac{1}{t^u}\right) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^u} \quad \text{converge, car intégrale de Riemann.}$$

Par critère de comparaison sur les fonctions positives, on en déduit que $\int_0^1 \psi_k(t) dt$ converge.

- **Au voisinage de $+\infty$,**

$$\forall t \in]1, +\infty[, \quad |\psi_k(t)| = |\ln t|^k t^{b-1} e^{-t}$$

Par croissances comparées, grâce à l'exponentielle :

$$0 \leq |\psi_k(t)| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par critère de comparaison, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \psi_k(t) dt$ converge.

- Conclusion : $\boxed{\text{Les fonctions } \psi_k(t) \text{ sont intégrables sur } \mathbb{R}_+^* \text{ pour } k \in \{0, 1, 2\}.}$

Q12 Notons $h : (x, t) \mapsto e^{-t} t^{x-1}$. h est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ et admet sur cet ensemble des dérivées partielles par rapport à x .

- On a : $\forall x > 0, \quad \forall t > 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \ln(t) e^{-t} t^{x-1}$.
 - Pour tout $x > 0$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après **Q8**).
 - Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $0 < a < b$, pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $t > 0$, on a d'après **Q10** :

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = |\ln(t)| e^{-t} t^{x-1} \leq |\ln(t)| \varphi(t) = \psi_1(t)$$

D'après **Q11**, la fonction ψ_1 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres indique donc que $\Gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ avec

$$\forall x > 0, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt$$

- On a : $\forall x > 0, \quad \forall t > 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1}$.
 - Pour tout $x > 0, \quad t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.
 - Pour tout $x > 0, \quad t \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
 - Pour tout $t > 0, \quad x \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
 - Pour tout $0 < a < b$, pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $t > 0$, on a d'après **Q10** :

$$\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| = (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} \leq (\ln(t))^2 \varphi(t) = \psi_2(t)$$

D'après **Q11** la fonction ψ_2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres indique donc que $\Gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ avec

$$\forall x > 0, \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt$$

Q13 • **Symétrie** : Soit $(u, v) \in (\mathcal{C}^0([\alpha, \beta]))^2$.

$$\langle u, v \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} u(t)v(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} v(t)u(t)dt = \langle v, u \rangle$$

• **Bilinéarité** : Soit $(u, v, w) \in (\mathcal{C}^0([\alpha, \beta]))^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle \lambda u + w, v \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} (\lambda u(t) + w(t))v(t)dt = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} u(t)v(t)dt + \int_{\alpha}^{\beta} w(t)v(t)dt = \lambda \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$$

La propriété de linéarité par rapport à la première variable est vérifiée.

On en déduit la bilinéarité.

• **Définie-positivité** : Soit $u \in \mathcal{C}^0([\alpha, \beta])$. Alors $\langle u, u \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} (u(t))^2 dt \geq 0$

Supposons que $0 = \langle u, u \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} (u(t))^2 dt$.

Puisque u^2 est une fonction continue et positive sur $[\alpha, \beta]$, et que son intégrale sur cet intervalle est nulle, il s'ensuit que u^2 est la fonction nulle.

• Conclusion : l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([\alpha, \beta])$.

Q14 • L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne pour $0 < \alpha < \beta$:

$$\forall (u, v) \in (\mathcal{C}^0([\alpha, \beta]))^2, \quad \left(\int_{\alpha}^{\beta} u(t)v(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} u(t)^2 dt \right) \left(\int_{\alpha}^{\beta} v(t)^2 dt \right)$$

Soit $x > 0$. Appliquons l'inégalité à : $\forall t > 0, \quad u(t) = t^{(x-1)/2} e^{-t/2}$ et $v(t) = \ln(t) t^{(x-1)/2} e^{-t/2}$.

On obtient :

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} t^{x-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_{\alpha}^{\beta} \ln^2(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right)$$

En faisant alors tendre α vers 0 et β vers $+\infty$, on a :

$$\forall x > 0, \quad (\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

- Soit, pour $x > 0$, $h(x) = \ln(\Gamma(x))$. Alors h est deux fois dérivable et :

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \quad \text{et} \quad h''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2}$$

Comme Γ est une fonction strictement positive et d'après **Q14**, on a :

$$\forall x > 0, \quad h''(x) \geq 0$$

Ainsi la fonction $\ln \circ \Gamma$ est convexe.

- Les questions **Q8**, **Q9** et **Q14** et le fait que $\Gamma(1) = 1$ prouvent que

la fonction Γ vérifie bien la propriété (S).

Q15 Démontrons la formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons H_n l'assertion :

« Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $f(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)f(x)$. »

- **Initialisation :**

$f(x+0) = f(x)$. Le produit vide $x(x+1)\dots(x-1)$ est égal à 1. Donc, H_0 est vraie.

H_1 est également vraie, car f vérifie (S).

- **Hérédité :** Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, la formule soit vraie :

$$\forall x > 0, \quad f(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)f(x)$$

Montrons que la formule est vraie pour $n+1$. Soit $x > 0$.

En utilisant la relation fonctionnelle $f(y+1) = yf(y)$ avec $y = x+n$, nous avons :

$$f(x+n+1) = (x+n)f(x+n)$$

Et par l'hypothèse de récurrence :

$$f(x+n+1) = (x+n)[x(x+1)\dots(x+n-1)f(x)] = x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)f(x)$$

La formule est donc vraie pour $n+1$.

- Par le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad f(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)f(x)$$

- En appliquant ce qui précède à $x = 1$, en sachant que $f(1) = 1$, on obtient :

$$f(n+1) = n! \quad \text{et} \quad g(n+1) = \ln(n!)$$

Q16 Par **Q15**, on a immédiatement :

$$g(x+n+1) = \ln(x(x+1)\dots(x+n)) + g(x)$$

Q17 La fonction $g = \ln \circ f$ est convexe sur $]0, +\infty[$ par hypothèse.

Considérons $x \in]0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et les points $n, n+1, n+1+x, n+2$.

Puisque $x \in]0, 1]$, on a $n < n+1 < n+1+x \leq n+2$ et le lemme 1 donne :

$$\frac{g(n) - g(n+1)}{-1} \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \quad \text{et} \quad \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq g(n+2) - g(n+1)$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g(n+1) - g(n) \leq \frac{g(x+n+1) - g(n+1)}{x} \leq g(n+2) - g(n+1)$$

Q18 Soient $x \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On a vu que $g(n+1) = \ln(n!)$ et, par **Q16**, $g(x+n+1) = \ln(x(x+1)\dots(x+n)) + g(x)$. On remplace alors dans les inégalités de **Q17** :

$$\ln(n) \leq \frac{\ln(f(x)) + \ln(x(x+1)\dots(x+n)) - \ln(n!)}{x} \leq \ln(n+1)$$

Donc :

$$x \ln(n) - \ln(x(x+1)\dots(x+n)) + \ln(n!) \leq \ln(f(x)) \leq x \ln(n+1) - \ln(x(x+1)\dots(x+n)) + \ln(n!)$$

Et, par croissance de exp :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^x f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \leq f(x)$$

Or, x étant fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^x = 1$, donc l'encadrement montre que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = f(x)$$

Q19 La fonction Γ vérifiant (S), on a aussi : $\forall x \in]0, 1], \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Par unicité de la limite, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in]0, 1], \quad f(x) = \Gamma(x)}$$

Q20 Soit $x > 1$. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, / n_0 < x \leq n_0 + 1$ càd $0 < x - n_0 \leq 1$.

Ainsi, en notant $y = x - n_0$, par **Q15**, on a :

$$f(x) = f(y + n_0) = y(y+1)\dots(y+n_0-1)f(y)$$

Or $y \in]0, 1]$ donc (**Q19**), $f(y) = \Gamma(y)$, et comme Γ vérifie aussi **Q15**, on a $f(x) = \Gamma(x)$.

On a donc bien prouvé que :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f(x) = \Gamma(x)}$$

PROBLÈME : Étude d'une classe d'endomorphismes

Q21 On a $u(1) = 0$, $u(X) = 1$, $u(X^2) = 2X^2 + 2X$.

Donc la matrice de u dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ est donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a directement $Sp(M) = \{0, 2\}$.

Il est évident que $rg(M) = 2$, donc par le théorème du rang $\dim(\ker M) = 1$. Puisque la dimension du sous-espace propre E_0 (qui est 1) est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité de 0 (qui est 2),

l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable.

Q22 On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $\ker M^2$ est le plan d'équation $z = 0$.

Donc $\ker(u^2) = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{K}_1[X]$.

Comme $u(1)$ et $u(X)$ appartiennent à $\mathbb{K}_1[X]$,

$\text{Ker } u^2$ est un sous-espace vectoriel stable par u .

Q23 • Analyse :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base qui convient.

Alors $u(e_1) = 2e_1$ donc e_1 est un vecteur propre associé à 2, $u(e_2) = 0$ donc e_2 est un vecteur propre associé à 0 et $u(e_3) = e_2$.

On calcule $\ker(M - 2I_3)$ et on choisit par exemple $e_1 = 1 + 2X + 2X^2$.

Q21 montre que $e_2 = 1$ et $e_3 = X$ conviennent.

• Synthèse :

Les polynômes $1 + 2X + 2X^2$, 1 et X sont échelonnés en degré et au nombre de 3, donc forment une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Par construction, la matrice de u dans cette base est bien celle souhaitée.

• Conclusion : La base cherchée est $(1 + 2X + 2X^2, 1, X)$.

De plus, la forme de la matrice montre que $u \in \mathcal{D}$.

Q24 La matrice de v dans la base canonique est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q25 Un sous-espace vectoriel de dimension 1 stable par v est engendré par un vecteur propre de v .

Or la seule valeur propre de v est $\lambda = 0$ et $E_0 = \text{Vect}(1)$.

Donc le seul sous-espace vectoriel de dimension 1 stable par v est $\text{Vect}(1) = \mathbb{K}_0[X]$.

Q26 • On a $v(\mathbb{K}_1[X]) = \text{Vect}(v(1), v(X)) = \text{Vect}(1) \subset \mathbb{K}_1[X]$ donc $\mathbb{K}_1[X]$ est stable par v .

• Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 stable par v .

Supposons que F contienne un polynôme de degré 2, $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. Puisque F est stable par v , $v(P) = P' = 2aX + b \in F$ et $v(P') = P'' = 2a \in F$.

Donc, comme a est non nul et F est un sous espace vectoriel, F contient $\mathbb{K}_0[X]$.

Donc $2aX = P' - b \in F$ donc $X \in F$ donc F contient $\mathbb{K}_1[X]$.

Donc $aX^2 = P - bX - c \in F$ donc $X^2 \in F$ donc F contient $\mathbb{K}_2[X]$ et finalement $F = \mathbb{K}_2[X]$, ce qui est absurde puisque $\dim(F) = 2$.

On a donc montré que $F \subset \mathbb{K}_1[X]$, et comme ces deux espaces ont même dimension $F = \mathbb{K}_1[X]$.

• Ainsi, le seul sous-espace vectoriel de dimension 2 stable par v est $\mathbb{K}_1[X]$.

Q27 D'après **Q25** et **Q26**, pour que v appartienne à $\mathcal{D}$, il faudrait que $\mathbb{K}_0[X] \oplus \mathbb{K}_1[X] = \mathbb{K}_2[X]$.

Cela est faux car $\mathbb{K}_0[X] \cap \mathbb{K}_1[X] \neq \{0\}$, donc $v \notin \mathcal{D}$.

Q28 $w = u - v : P \mapsto X^2 P''$ a pour matrice dans la base canonique : $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a donc immédiatement $w \in \mathcal{D}$.

Si $\mathcal{D}$ était un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, v qui est égal à $u - w$ appartiendrait à $\mathcal{D}$. Absurde.

Donc $\mathcal{D}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Q29 Soit E un espace vectoriel de dimension 1. On peut choisir une base $\{e\}$ de E , avec $e \neq 0$.

Comme $u(e) \in E$, il existe un scalaire λ tel que $u(e) = \lambda e$.

Par hypothèse, $u^k(e) = 0$, donc $\lambda^k e = 0$, et comme $e \neq 0$, on a $\lambda^k = 0$, donc $\lambda = 0$ et $u(e) = 0$.

Ainsi u est l'application linéaire nulle.

Q30 On suppose dans ce cas que $\dim E = 2$ et que u est non nul.

Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille :

$$\alpha_{k-1}u^{k-1}(x) + \alpha_{k-2}u^{k-2}(x) + \cdots + \alpha_1u(x) + \alpha_0x = 0 \quad (*)$$

Appliquons u^{k-1} à l'équation (*). Par linéarité de u et puisque $u^j(x) = 0$ pour $j \geq k$, tous les termes sauf le dernier s'annulent :

$$\alpha_0u^{k-1}(x) = 0$$

Comme $u^{k-1}(x) \neq 0$ par hypothèse, il s'ensuit que $\alpha_0 = 0$. L'équation (*) devient alors :

$$\alpha_{k-1}u^{k-1}(x) + \alpha_{k-2}u^{k-2}(x) + \cdots + \alpha_1u(x) = 0$$

Appliquons u^{k-2} à cette nouvelle équation. De la même manière, tous les termes sauf le dernier s'annulent, et on déduit que $\alpha_1 = 0$.

En répétant ce processus (par récurrence descendante), on montre successivement que

$$\alpha_2 = 0, \dots, \alpha_{k-1} = 0.$$

Tous les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ sont nuls. Par conséquent, la famille $(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \dots, u(x), x)$ est libre.

Q31 La famille $(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \dots, u(x), x)$ est libre et contient k vecteurs.

Puisque $\dim E = 2$, une famille libre ne peut pas contenir plus de 2 vecteurs. Donc, $k \leq 2$.

De plus $u^0 = Id_E \neq 0$ et par hypothèse $u^1 = u \neq 0$. Donc $k \geq 2$.

Et finalement $k = 2$ et $u \in \mathcal{N}_2$.

Q32 Soit $u \in \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$.

Puisque $u \in \mathcal{N}$, u est nilpotent, donc il existe $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$.

Puisque $u \in \mathcal{D}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + 2q = n$ et des sous-espaces vectoriels $D_1, \dots, D_p, P_1, \dots, P_q$ de E stables par u , les D_i étant de dimension 1 et les P_j de dimension 2, tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p D_i \oplus \bigoplus_{j=1}^q P_j$$

Notons, pour $i \in [[1, p]]$, v_i l'endomorphisme induit par u sur D_i , et pour $j \in [[1, q]]$, w_j l'endomorphisme induit par u sur P_j . Comme $u^k = 0$, on a :

$$\forall (i, j) \in [[1, p]] \times [[1, q]], \quad v_i^k = 0 \quad \text{et} \quad w_j^k = 0$$

Par **Q29**, $\forall i \in [[1, p]], \quad v_i = 0$. Par **Q30** et **Q31**, $\forall j \in [[1, q]], \quad w_j = 0$ ou $k = 2$.

On a donc $k = 1$ ou $k = 2$, et $u \in \mathcal{N}_2$.

Nous avons donc montré que $\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2$.

Q33 Soit $u \in \mathcal{N}_2$, cela signifie $u^2 = 0$.

- Soit $y \in \text{Im } u$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.

Alors $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0$ et $y \in \text{Ker } u$.

Par conséquent, $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.

- Par définition, $r = \text{rg}(u) = \dim(\text{Im } u)$.

Par le théorème du rang, $n = \dim(E) = \dim(\text{Ker } u) + r$. Donc $\dim(\text{Ker } u) = n - r$.

Puisque $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$, on a $r \leq \dim(\text{Ker } u)$. Et finalement $\boxed{r \leq n - r}$.

Q34 Soit la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$. Elle est de cardinal $(n - r) + r = n = \dim(E)$.

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}$ est libre pour que ce soit une base de E .

Considérons une combinaison linéaire nulle : $\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^r \beta_j f_j = 0$.

On a alors, par linéarité de u : $\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i u(e_i) + \sum_{j=1}^r \beta_j u(f_j) = u(0) = 0$.

Puisque $(e_1, \dots, e_{n-r})$ est une base de $\text{Ker } u$, $u(e_i) = 0$ pour $i \in [[1, n - r]]$.

De plus, $\forall j \in [[1, r]]$, $u(f_j) = e_j$. Donc : $\sum_{j=1}^r \beta_j e_j = 0$.

Puisque $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\text{Im } u$, c'est une famille libre. Donc $\forall j \in [[1, r]]$, $\beta_j = 0$. En substituant ces

valeurs dans l'équation initiale : $\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i = 0$.

Puisque $(e_1, \dots, e_{n-r})$ est une base de $\text{Ker } u$, c'est une famille libre.

Donc $\forall i \in [[1, n - r]]$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$.

Tous les coefficients sont nuls, donc la famille $\mathcal{B}$ est libre. Étant une famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n , $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E}$.

Q35 Reprenons la base construite en **Q34**. Pour obtenir la forme souhaitée, nous allons réordonner les vecteurs.

Soit la base $\mathcal{B} = (e_{r+1}, \dots, e_{n-r}, e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r)$. Calculons l'image de chaque vecteur par u :

- Pour $k \in [[r + 1, n - r]]$, $e_k \in \text{Ker } u$, donc $u(e_k) = 0$. Ces $n - 2r$ vecteurs forment les premières $n - 2r$ colonnes de la matrice, qui sont nulles. Cela correspond au bloc 0_{n-2r} .
- Pour $j \in [[1, r]]$, $e_j \in \text{Im } u \subset \text{Ker } u$, donc $u(e_j) = 0$. Par construction, $u(f_j) = e_j$.

Dans le sous-espace engendré par (e_j, f_j) , la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J$.

Ainsi la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est bien de la forme diagonale par blocs spécifiée, avec 0_{n-2r} et r blocs J :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0_{n-2r} & & & \\ & J & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & J \end{pmatrix}}$$

Q36 • On vient de démontrer que si $u \in \mathcal{N}_2$ alors u vérifie la propriété *ii*), donc $u \in \mathcal{D}$.

Donc $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{D}$. De plus, par définition, $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}$. Donc $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$.

- Dans la question **Q32**, nous avons montré que $\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2$.

- En conclusion, $\boxed{\mathcal{N}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}}$.

Q37 • **Dimensions des espaces :**

Remarquons tout d'abord que si A et B sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à 1 alors $\varphi(A, B)$ est un polynôme de degré au plus $\max(2 + 1, 2 + 1) = 3$.

Donc φ est bien à valeurs dans $\mathbb{K}_3[X]$.

De plus $\mathbb{K}_1[X]$ est un espace vectoriel de dimension 2, donc $\mathbb{K}_1[X]^2$ est de dimension $2 + 2 = 4$. Et $\mathbb{K}_3[X]$ est de dimension 4.

- **Linéarité de φ :** Soient $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ dans $\mathbb{K}_1[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
 \varphi((A_1, B_1) + \lambda(A_2, B_2)) &= \varphi((A_1 + \lambda A_2, B_1 + \lambda B_2)) \\
 &= (X - a)^2(A_1 + \lambda A_2) + (X - b)^2(B_1 + \lambda B_2) \\
 &= (X - a)^2 A_1 + \lambda(X - a)^2 A_2 + (X - b)^2 B_1 + \lambda(X - b)^2 B_2 \\
 &= ((X - a)^2 A_1 + (X - b)^2 B_1) + \lambda((X - a)^2 A_2 + (X - b)^2 B_2) \\
 &= \varphi(A_1, B_1) + \lambda\varphi(A_2, B_2)
 \end{aligned}$$

L'application φ est donc linéaire.

- **Injectivité de φ :** Soit $(A, B) \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors $\varphi(A, B) = 0$, ce qui signifie :

$$(X - a)^2 A + (X - b)^2 B = 0 \quad \text{soit} \quad (X - a)^2 A = -(X - b)^2 B$$

On en déduit que $(X - a)^2$ divise $(X - b)^2 B$. Comme $a \neq b$, $(X - a)^2$ divise B .

Or, $B \in \mathbb{K}_1[X]$, donc $\deg(B) \leq 1$ et le polynôme $(X - a)^2$ est de degré 2.

Donc $B = 0$.

Il reste alors $(X - a)^2 A = 0$. Puisque $(X - a)^2$ n'est pas le polynôme nul, on a $A = 0$.

Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = \{(0, 0)\}$, ce qui prouve que φ est injective.

- Les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension finie et φ est une application linéaire et injective, donc

φ est un isomorphisme.

- Puisque φ est un isomorphisme, elle est surjective. Le polynôme constant égal à 1 appartient $\mathbb{K}_3[X]$, par conséquent, il existe un couple $(A, B) \in \mathbb{K}_1[X]^2$ tel que $\varphi(A, B) = 1$, c'est-à-dire :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{K}_1[X]^2 / (X - a)^2 A + (X - b)^2 B = 1$$

- **Remarque :** Une base de $\mathbb{K}_1[X]^2$ est $\mathcal{B} = ((1, 0), (X, 0), (0, 1), (0, X))$, et une base de $\mathbb{K}_3[X]$ est $\mathcal{C} = (1, X^2, X^3, X^3)$. La matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$$\begin{pmatrix}
 a^2 & 0 & b^2 & 0 \\
 -2a & a^2 & -2b & b^2 \\
 1 & -2a & 1 & -2b \\
 0 & 1 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

Q38 Soit $x \in \text{Ker}(u - a\text{Id}_E)^2 \cap \text{Ker}(u - b\text{Id}_E)^2$. 555555 On a alors $(u - a\text{Id}_E)^2(x) = 0$ et $(u - b\text{Id}_E)^2(x) = 0$.

D'après **Q37**, il existe des polynômes A et B de $\mathbb{K}_1[X]$ tels que $A(X - a)^2 + B(X - b)^2 = (X - a)^2 A + (X - b)^2 B = 1$.

En substituant u à X , on a $A(u) \circ (u - a\text{Id}_E)^2 + B(u) \circ (u - b\text{Id}_E)^2 = \text{Id}_E$. Donc en prenant la valeur en x :

$$x = A(u)(u - a\text{Id}_E)^2(x) + B(u)(u - b\text{Id}_E)^2(x) = A(u)(0) + B(u)(0) = 0$$

On en conclut que $\text{Ker}(u - a\text{Id}_E)^2 \cap \text{Ker}(u - b\text{Id}_E)^2 = \{0\}$.

Q39 Pour tout $k \in [[1, p]]$, $\text{Ker}(u - \alpha_k \text{Id}_E)$ est soit l'espace vectoriel nul, soit le sous espace propre de u associé à la valeur propre λ_k . On sait que les sous espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

On en conclut donc que la somme $\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E)$ est directe.

Q40 Notons pour $q \in \mathbb{N}$, H_q l'assertion :

« Soient $p \in \mathbb{N}$ tel que $(p, q) \neq (0, 0)$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{K}^q$ deux familles de scalaires, éventuellement vides, telles que les $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ sont distincts.

Alors la somme $\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$ est directe. »

• Initialisation :

Si $q = 0$ alors $p \geq 1$ et H_0 est vraie d'après **Q39**.

Si $p = 0$ alors H_1 est vraie.

• Hérédité : Supposons H_q vraie à un rang q et montrons que H_{q+1} est vraie.

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\beta_1, \dots, \beta_{q+1}) \in \mathbb{K}^{q+1}$ deux familles de scalaires telles que les $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{q+1}$ sont distincts.

Montrons la somme $\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+1} \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$ est directe.

Pour cela, prenons $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs tels que $x_i \in \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E)$ pour tout i et $y_1, \dots, y_{q+1}$ des vecteurs tels que $y_j \in \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$ pour tout j et supposons que

$$(*) \quad \sum_{i=1}^p x_i + \sum_{j=1}^{q+1} y_j = 0$$

Montrons alors que :

$$\forall i \in [[1, p]], \quad x_i = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [[1, q+1]], \quad y_i = 0$$

Appliquons $(u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2$ à (*).

Pour $i \in [[1, p]]$, $u(x_i) = \alpha_i x_i$, donc on sait que pour tout polynôme P ,

$P(u)(x_i) = P(\alpha_i)x_i$. Cela donne avec le polynôme $(X - \beta_{q+1})^2$:

$$(u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2(x_i) = (\alpha_i - \beta_{q+1})^2 x_i$$

Pour $j \in [[1, q]]$, $(u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2(y_j) \in \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$ car

$$(u - \beta_j \text{Id}_E)^2 \circ (u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2(y_j) = (u - \beta_{q+1} \text{Id}_E) \circ (u - \beta_j \text{Id}_E)^2(y_j) = (u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2((u - \beta_j \text{Id}_E)^2(y_j)) = 0$$

Et

$$(u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2(y_{q+1}) = 0$$

On a ainsi

$$\sum_{i=1}^p \underbrace{(\alpha_i - \beta_{q+1})^2 x_i}_{\in \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E)} + \sum_{j=1}^q \underbrace{(u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2(y_j)}_{\in \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2} = 0$$

On peut alors appliquer l'hypothèse H_q et on en déduit :

$$\forall i \in [[1, p]], \quad (\alpha_i - \beta_{q+1})^2 x_i = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in [[1, q]], \quad (u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2(y_j) = 0$$

Les α_i et β_j étant deux à deux distincts :

$$\forall i \in [[1, p]], \quad x_i = 0$$

et

$$\forall j \in [[1, q]], \quad y_j \in \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2 \cap \text{Ker}(u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2$$

Les β_j étant deux à deux distincts, la question **Q38** permet de conclure :

$$\forall j \in [[1, q]], \quad y_j = 0$$

(*) fournit ensuite $y_{q+1} = 0$.

- Conclusion : on a montré par récurrence sur q que

$$\boxed{\text{la somme } \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2 \text{ est directe.}}$$

Q41 • Montrons que la famille $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_q)$ est libre.

Considérons une combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{k=1}^p a_k P_k + \sum_{k=1}^q b_k Q_k + \sum_{k=1}^q c_k R_k = 0 \quad (1)$$

où les a_k , b_k et c_k sont dans $\mathbb{K}$.

* On a, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad P_k(\alpha_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ \prod_{j \neq i}^p (\alpha_i - \alpha_j) \prod_{j=1}^q (\alpha_i - \beta_j)^2 \neq 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad Q_j(\alpha_i) = R_j(\alpha_i) = 0$$

En évaluant (1) en $X = \alpha_i$, on obtient : $a_i P_i(\alpha_i) = 0$.

Puisque $P_i(\alpha_i) \neq 0$, il s'ensuit que $a_i = 0$, et ceci pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

L'équation (1) se réduit alors à :

$$\sum_{k=1}^q b_k Q_k + \sum_{k=1}^q c_k R_k = 0 \quad (2)$$

* On a, pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad Q_k(\beta_j) = 0 \quad \text{et} \quad R_k(\beta_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \prod_{i=1}^p (\beta_j - \alpha_i) \prod_{i \neq j}^q (\beta_j - \beta_i)^2 \neq 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En évaluant (2) en $X = \beta_j$, on obtient : $c_j R_j(\beta_j) = 0$.

Puisque $R_j(\beta_j) \neq 0$, il s'ensuit que $c_j = 0$, et ceci pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$.

L'équation (2) se réduit alors à :

$$\sum_{k=1}^q b_k Q_k = 0 \quad (3)$$

* Dérivons l'équation (3) : $\sum_{k=1}^q b_k Q'_k = 0$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, évaluons cette équation en $X = \beta_j$.

β_j est racine simple de Q_j et racine double de Q_k si $k \neq j$, donc $Q'_j(\beta_j) \neq 0$ et $\forall k \neq j, \quad Q'_k(\beta_j) = 0$.

On obtient comme précédemment, $b_j = 0$.

* Nous avons montré que tous les coefficients a_k , b_k et c_k sont nuls. Par conséquent,

$$\boxed{\text{la famille } \mathcal{B} = (P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_q) \text{ est libre.}}$$

- Le degré du polynôme P est $\deg(P) = p + 2q$. Donc, par définition, on a

$$* \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \deg(P_i) = p + 2q - 1.$$

$$* \quad \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \deg(Q_j) = p + 2q - 1$$

$$* \quad \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \deg(R_j) = p + 2q - 2.$$

Tous ces polynômes appartiennent bien à l'espace $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$. La famille $\mathcal{B}$ est de cardinal $p + 2q$ et la dimension de l'espace $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$ est $(p + 2q - 1) + 1 = p + 2q$.

Puisqu'une famille libre de $p + 2q$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $p + 2q$ est une base de cet espace, on en déduit que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{K}_{p+2q-1}[X].}$

Q42 $p + 2q - 1 \geq 0$ donc on peut décomposer le polynôme constant égal à 1 sur la base $\mathcal{B}$:

$$\exists (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q, c_1, \dots, c_q) \in \mathbb{K}^{p+2q} / 1 = \sum_{i=1}^p a_i P_i + \sum_{j=1}^q b_j Q_j + \sum_{j=1}^q c_j R_j$$

En substituant u à X , on obtient :

$$id_E = \sum_{i=1}^p a_i P_i(u) + \sum_{j=1}^q b_j Q_j(u) + \sum_{j=1}^q c_j R_j(u)$$

Prenons alors un élément quelconque x de E . On a :

$$x = \sum_{i=1}^p a_i P_i(u)(x) + \sum_{j=1}^q b_j Q_j(u)(x) + \sum_{j=1}^q c_j R_j(u)(x)$$

Or, P étant un polynôme annulateur de u :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad (X - \alpha_i)P_i = P \quad \text{donc} \quad (u - \alpha_i Id_E) \circ P_i(u) = P(u) = 0$$

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad (X - \beta_j)Q_j = P \quad \text{donc} \quad (u - \beta_j Id_E) \circ Q_j(u) = P(u) = 0 \quad \text{et} \quad (u - \beta_j Id_E)^2 \circ Q_j(u) = 0$$

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad (X - \beta_j)^2 R_j = P \quad \text{donc} \quad (u - \beta_j Id_E)^2 \circ R_j(u) = P(u) = 0$$

Ainsi :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad P_i(u)(x) \in \text{Ker}(u - \alpha_i Id_E),$$

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad Q_j(u)(x) \in \text{Ker}(u - \beta_j Id_E)^2 \quad \text{et} \quad R_j(u)(x) \in \text{Ker}(u - \beta_j Id_E)^2$$

Cela prouve finalement que $E = \sum_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i Id_E) + \sum_{j=1}^q \text{Ker}(u - \beta_j Id_E)^2$.

Mais on a vu dans **Q40** que cette somme est directe donc on a bien prouvé

$$\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i Id_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}(u - \beta_j Id_E)^2}$$

Q43 • Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $F_i = \text{Ker}(u - \alpha_i Id_E)$ est stable par u et l'endomorphisme induit par u sur F_i est une homothétie. Il existe donc une base de F_i dans laquelle l'endomorphisme induit par u sur F_i a une matrice diagonale.

• Pour $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, notons $G_j = \text{Ker}(u - \beta_j Id_E)^2$.

G_j est stable par $u - \beta_j Id_E$ donc on peut considérer l'endomorphisme w_j induit par $u - \beta_j Id_E$ sur G_j .

On a par définition $w_j^2 = 0$ donc w_j est nilpotent d'indice 1 ou 2. S'il est nilpotent d'indice 1 alors $w_j = 0$ donc $u = \beta_j Id_E$ sur G_j . S'il est nilpotent d'indice 2 alors d'après **Q36**, $w_j \in \mathcal{D}$.

Il existe donc une base de G_j dans laquelle la matrice de w_j a la forme (ii).

Or $\forall x \in G_j, \quad u(x) = w_j(x) + \beta_j x$. Donc dans cette base, l'endomorphisme induit par u sur G_j a une matrice de la forme (ii).

• En concaténant les bases de chacun des noyaux, on obtient une base de E dans laquelle la matrice de u a la forme (ii). Ainsi $\boxed{u \in \mathcal{D}.}$