

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5. On rappelle que $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ est le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$, à coefficients complexes.
- Dans tout l'exercice, on confondra un polynôme et sa fonction polynomiale associée.
- Pour tout endomorphisme v de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et tout entier naturel m , on rappelle que : $v^0 = \text{Id}$ où Id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et lorsque m est non nul, $v^m = v \circ v^{m-1}$.
- On considère l'application u définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], u(P) = Q \text{ où } Q(X) = P(X + 1).$$

1. Étude de u .

(a) Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Solution:

- Montrons que u est à **valeurs dans** $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On a alors $u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X + 1)^k$. Ceci est bien un **polynôme**.

Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, selon la formule du binôme de NEWTON, $(X + 1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X^j$. Ainsi, $(X + 1)^k$ est de degré k et donc $\deg(X + 1)^k \leq n - 1$. Par **propriété du degré de la somme**, on a donc $\deg u(P) \leq n - 1$ et ainsi $u(P) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

- Montrons que u est **linéaire**. Soit $(P, Q) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $u(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X + 1) = \lambda P(X + 1) + Q(X + 1)$ ce qui est bien $\lambda u(P) + u(Q)$.

- (b) Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ la base canonique ordonnée de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire :

$$\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P_j(X) = X^j.$$

Pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, déterminer l'expression de $u(P_j)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution: D'après la formule du binôme de NEWTON, $(X+1)^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} X^k$. Ainsi

$$u(P_j) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} P_k$$

- (c) Déterminer alors la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$.

On fera clairement apparaître sur la copie les deux premières colonnes ainsi que la k -ième colonne de la matrice M pour un entier naturel $k \in \llbracket 3, n-2 \rrbracket$.

Solution:

Selon l'expression trouvée dans la question précédente, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{k}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{k}{1} & \dots & \binom{n-1}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{k}{2} & \dots & \binom{n-1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{k}{k} & \dots & \binom{n-1}{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix}$$

- (d) Déterminer le polynôme caractéristique χ_u de l'endomorphisme u .

Solution: La matrice de u dans $\mathcal{B}$ étant triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux égaux à 1, on a $\chi_u = (X-1)^n$.

- (e) L'endomorphisme u est-il diagonalisable?

Solution: Comme $\chi_u = (X-1)^n$, si u était diagonalisable, il existerait une base dans laquelle la matrice de u serait I_n et ainsi u serait Id ce qui n'est pas le cas.

Ainsi, u **n'est pas diagonalisable**.

- (f) Justifier que l'endomorphisme u est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et préciser u^{-1} .

Solution: Soit $v : P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto P(X-1)$.

Prenons $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On a $u \circ v(P) = u(P(X-1)) = P$ et $v \circ u(P) = v(P(X+1)) = P$.

Ainsi, $u \circ v = v \circ u = Id$.

Cela montre que u est bijectif (et est donc un automorphisme) et qu'on a $u^{-1} = v$.

(g) Déterminer M^{-1} .

Solution: On sait que M^{-1} est la matrice de v dans $\mathcal{B}$.

Or, si $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a, selon la formule du binôme de NEWTON : $v(P_j) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{j-k} P_k$.

Ainsi,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & (-1)^k \binom{k}{0} & \dots & (-1)^{n-1} \binom{n-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \dots & (-1)^{k-1} \binom{k}{1} & \dots & (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & (-1)^{k-2} \binom{k}{2} & \dots & (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{k}{k} & \dots & (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix}$$

(h) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer u^k .

Solution: On raisonne par **récurrence**. Pour cela, pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(k)$ la proposition :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], u^k(P) = P(X+k)$$

- On a bien $\mathcal{P}(0)$ puisque si $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, alors $u^0(P) = Id(P) = P(X)$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$.

Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On a $u^{k+1}(P) = u(u^k(P)) = u(P(X+k)) = P(X+k+1)$.

Cela valide bien $\mathcal{P}(k+1)$.

Finalement, on obtient bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], u^k(P) = P(X+k)$$

2. On note $\Delta = u - Id$.

(a) Montrer que Δ est nilpotent avec : $\Delta^n = 0$.

Solution: La matrice de Δ dans $\mathcal{B}$ est $M - I_n$: elle est **triangulaire supérieure stricte**. Ainsi, selon le cours, Δ est nilpotent. Comme $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ est de dimension n , on a alors, selon le cours, $\Delta^n = 0$.

(b) L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable?

Solution: Comme Δ est nilpotente, son spectre est $\{0\}$.

Si Δ était diagonalisable, il existerait donc une base dans laquelle sa matrice serait la matrice nulle et Δ serait donc nulle ce qui n'est pas le cas.

Ainsi : Δ n'est donc pas diagonalisable.

3. Démontrer qu'il existe des entiers relatifs $(a_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \in \mathbb{Z}^n$, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

Solution: Comme $u \circ Id = Id \circ u$, selon la formule du binôme de NEWTON, on a $\Delta^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-Id)^{n-k} u^k$ c'est-à-dire

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u^k$$

Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. En évaluant l'égalité précédente en P , on obtient :

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u^k(P)$$

En isolant le terme pour $k = n$, cela s'écrit :

$$P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k) = 0$$

Il ne reste plus qu'à poser, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k = (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$.

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, a désigne un nombre réel. Pour tout réel $s > 1$, on appelle

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

et l'on rappelle :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1. Justifier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2 + a^2}$.

Solution: On constate que $u_n \sim \frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (c'est une série de Riemann), alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge également par comparaison de séries à termes positifs.

2. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1} dt$.

Solution: On pose $f : t \mapsto \frac{\sin(at)}{e^t - 1}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc il suffit de montrer l'intégrabilité en 0 et en $+\infty$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

- Intégrabilité en $+\infty$: on a

$$\left| \frac{\sin(at)}{e^t - 1} \right| \leq \frac{1}{e^t - 1}$$

Or, $\frac{1}{e^t - 1} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ par croissances comparées. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, il en va de même pour la fonction f par comparaison.

- Intégrabilité en 0 : si $a = 0$, alors $\frac{\sin(at)}{e^t - 1} = 0$ et le résultat est évident. Si $a \neq 0$, on a

$$\frac{\sin(at)}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{at}{t} = a$$

D'où $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = a$. Sa limite en 0 étant finie, f est intégrable en 0.

3. Prouver que, pour tout $t > 0$, $\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kt}$.

Solution: La série $\sum_{k \geq 1} e^{-kt}$ correspond à une série géométrique de raison e^{-t} et de premier terme e^{-t} . Comme $e^{-t} < 1$, cette série converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kt} = e^{-t} \times \frac{1}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1}$$

4. Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} (\sin(at))e^{-kt} dt = \frac{a}{a^2 + k^2}$.

Solution: Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord, la fonction $t \mapsto \sin(at)e^{-kt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $t \geq 0$, on a

$$|\sin(at)e^{-kt}| \leq e^{-kt} \leq e^{-t}$$

Or, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par comparaison, il en va de même pour $t \mapsto \sin(at)e^{-kt}$. Or,

$$\int_0^{+\infty} \sin(at)e^{-kt} dt = \int_0^{+\infty} \operatorname{Im}(e^{iat}) e^{-kt} dt$$

Comme a est réel et $k > 0$, pour tout réel positif t , on a $|e^{iat}e^{-kt}| \leq e^{-kt}$, et comme $t \mapsto e^{-kt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il en va de même pour $t \mapsto e^{iat}e^{-kt}$. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \sin(at)e^{-kt} dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{iat}e^{-kt} dt \right)$$

Calculons cette dernière intégrale séparément :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{iat}e^{-kt} dt &= \int_0^{+\infty} e^{(ia-k)t} dt \\ &= \left[\frac{1}{ia-k} e^{(ia-k)t} \right]_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{ia-k} \\ &= \frac{k+ia}{(k-ia)(k+ia)} \\ &= \frac{k+ia}{k^2+a^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \sin(at)e^{-kt} dt = \operatorname{Im} \left(\frac{k+ia}{k^2+a^2} \right) = \boxed{\frac{a}{k^2+a^2}}$$

5. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1} dt = a \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2}.$$

On pourra utiliser, en la démontrant, l'inégalité valable pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin(x)| \leq |x|$. Le théorème utilisé sera cité avec précision et on s'assurera que ses hypothèses sont bien vérifiées.

Solution: Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $|\sin(x)| \leq |x|$. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus sa dérivée est cosinus, qui est bornée par 1. Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que

$$|\sin x - \sin 0| \leq 1 \times |x - 0|$$

d'où $|\sin x| \leq |x|$. Par la question 3, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(at) e^{-kt} dt$$

On va utiliser le **théorème de convergence dominée**. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n \sin(at) e^{-kt}$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \frac{\sin(at)}{e^t - 1}$. Enfin, vérifions l'hypothèse de domination : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f_n(t)| &\leq \sum_{k=1}^n |\sin(at)| e^{-kt} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a| t e^{-kt} \\ &\leq \frac{|a|t}{e^t - 1} \end{aligned}$$

Or, la fonction $t \mapsto \frac{|a|t}{e^t - 1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$: en 0, elle est équivalente à $|a|$. En $+\infty$, on a

$\frac{|a|t}{e^t-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ as $t \rightarrow +\infty$. Ainsi, le théorème s'applique et on en déduit que

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t-1} dt &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^n \sin(at) e^{-kt} dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} \sin(at) e^{-kt} dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{a}{a^2 + k^2} \quad \text{par la question 4} \\
 &= a \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2}
 \end{aligned}$$

6. Déterminer: $\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2}$.

Le théorème utilisé sera cité avec précision et on s'assurera que ses hypothèses sont bien vérifiées.

Solution: On utilise le **théorème de la double limite** : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_k(x) = \frac{1}{x^2 + k^2}$$

On a

$$\|f_k\|_{\infty} \leq \frac{1}{k^2}$$

Or, par critère de Riemann, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge. On en déduit que la série $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Le théorème peut donc s'appliquer : on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

ce qui se réécrit, par l'indication de l'énoncé :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} = \zeta(2) = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$$

7. Développement en série entière de la fonction $H : a \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1} dt$.

(a) Prouver que :

$$\forall a \in]-1, 1[, \forall k \geq 1, \frac{1}{a^2 + k^2} = \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n}.$$

Solution:

Soit $a \in]-1, 1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $(-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n} = \left(-\frac{a^2}{k^2}\right)^n$ et que $\left|\frac{a^2}{k^2}\right| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n}$ est une série géométrique convergente, dont la somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{k^2}}$$

de sorte que

$$\frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n} = \frac{1}{k^2} \times \frac{1}{1 + \frac{a^2}{k^2}} = \boxed{\frac{1}{a^2 + k^2}}$$

(b) Démontrer alors que :

$$\forall a \in]-1, 1[, H(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) a^{2n+1}.$$

Solution: Soit $a \in]-1, 1[$. Par la question 5 et la question précédente, on a

$$\begin{aligned} H(a) &= a \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} \\ &= a \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n} \right) \\ &= a \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} (-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n} \end{aligned}$$

Pour justifier l'interversion des sommes, on vérifie que la famille $\left(\frac{1}{k^2}(-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n}\right)_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$ est sommable :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{k^2}(-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n} \right| &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a^2}{k^2}\right)^n \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \times \frac{1}{1 - \frac{a^2}{k^2}} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} \end{aligned}$$

et cette dernière somme est finie car $\frac{1}{k^2 - a^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$. Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} H(a) &= a \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}(-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n} \\ &= a \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a^{2n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n+2}} \\ &= \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a^{2n+1} \zeta(2n+2)} \end{aligned}$$

(c) Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

Solution: Selon la question précédente, sur $] -1, 1[$, H est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est ≥ 1 (puisque l'on a convergence de la série sur $] -1, 1[$).

Par propriété du cours, la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$.

H est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

(d) Déterminer $H^{(p)}(0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Solution: Selon le cours sur les séries entières, si on a pour tout $x \in] -1, 1[$, $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Ici, on a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $H^{(2n)}(0) = 0$ et $H^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!(-1)^n \zeta(2n+2)$.

8. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt$ est convergente.

Solution:

- La fonction $t \in]0, 1[\mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est continue
- En 0, $\ln(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc $\frac{\ln(t)}{t-1} = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Or, selon RIEMANN, $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge et ainsi, par comparaison des fonctions à valeurs positives, $\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t-1} dt$ converge.
- En 1, $\frac{\ln t}{t-1} \rightarrow 1$, et comme 1 est une borne finie, on obtient la convergence de $\int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$.

Finalement, $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$ converge.

9. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_p = \int_0^1 t^p \ln(t) dt$ converge.

Solution: Soit $p \in \mathbb{N}$.

- La fonction $t \in]0, 1] \mapsto t^p \ln t$ est continue.
- En 0, $\ln(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc $t^p \ln(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Or, selon RIEMANN, $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge et ainsi, par comparaison des fonctions à valeurs positives, $\int_0^1 t^p \ln(t) dt$ converge.

10. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer I_p .

Solution: Soit $p \in \mathbb{N}$.

On réalise une intégration par parties dans I_p en posant $u(t) = \frac{1}{p+1} t^{p+1}$ et $v(t) = \ln(t)$.

Ces deux fonctions sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et uv a une limite finie en 0 et en 1 (qui sont toutes les deux nulles).

Ainsi, on peut appliquer la théorème d'intégration par parties qui nous garantit la convergence de $\int_0^1 uv'$ (ce qu'on savait déjà) et qui donne l'égalité

$$I_p = \left[\frac{1}{p+1} t^{p+1} \ln(t) \right]_0^1 - \frac{1}{p+1} \int_0^1 t^p dt$$

c'est-à-dire

$$I_p = -\frac{1}{(p+1)^2}.$$

11. Prouver que:

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

Le théorème utilisé sera cité avec précision et on s'assurera que ses hypothèses sont bien vérifiées.

Solution: Soit $t \in]0, 1[$. On a $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k$ et ainsi

$$\underbrace{\frac{\ln t}{t-1}}_{f(t)} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{t^k \ln t}_{f_k(t)}$$

Appliquons maintenant le **théorème d'intégration terme à terme** :

- f et les f_k sont continues par morceaux.
- $\sum f_k$ converge simplement vers $-f$ sur $]0, 1[$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, f_k est intégrable : en effet, $\int_0^1 |f_k|$ est $\int_0^1 -t^k \ln t dt$ qui est convergente d'après la question 10.
- $\sum \int_0^1 |f_k|$ converge : oui car on sait que $\sum \frac{1}{(k+1)^2}$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne

$$-\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

12. Déterminer enfin la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt$.

Solution:

Selon la question précédente et le rappel, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soient a un réel non nul et n un entier naturel non nul, écrire le développement limité en 0 des fonctions :

- $t \mapsto e^{at}$ à l'ordre n ,
- $t \mapsto \ln(1 + at)$ à l'ordre 2 .

Solution:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \dots + \frac{1}{n!}a^nt^n + o_{t \rightarrow 0}(t^n)$$

$$\ln(1 + at) = at - \frac{1}{2}a^2t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$$

Pour X une variable aléatoire discrète finie, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on note $(x_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ avec $0 \leq x_1 < \dots < x_k$, où k est un entier naturel supérieur ou égal à 1, les valeurs prises par la variable aléatoire X avec une probabilité non nulle. On pose :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \mathbb{P}(X = x_i) = p_i > 0.$$

On définit alors l'application Φ_X de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \Phi_X(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\sum_{i=1}^k p_i e^{x_i t} \right).$$

2. Étude d'exemples.

(a) Déterminer Φ_X si X est une variable aléatoire certaine à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Solution: Comme X est une v.a. certaine, on a $k = 1$ et $\mathbb{P}(X = x_1) = 1$, avec $p_1 > 0$. La formule donne, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= \frac{1}{t} \ln(p_1 e^{x_1 t}) \\ &= \boxed{\frac{1}{t} \ln p_1 + x_1} \end{aligned}$$

(b) Soit Z une variable aléatoire telle que :

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}$$

i. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\Phi_Z(t)$.

Solution: Dans ce cas, on a $k = 2$, $(x_1, x_2) = (0, 1)$ et $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. La formule donne :

$$\begin{aligned}\Phi_Z(t) &= \frac{1}{t} \ln \left(\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} e^t \right) \\ &= \boxed{-\frac{1}{t} \ln 2 + \frac{1}{t} \ln (1 + e^t)}\end{aligned}$$

ii. Montrer que Φ_Z peut être prolongée en une fonction Φ_Z dérivable sur $\mathbb{R}$.

Solution: La fonction Φ_Z est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composée et somme de telles fonctions. Ensuite, on calcule un DL à l'ordre 1 de Φ_Z en 0.

$$\begin{aligned}\Phi_Z(t) &= -\frac{1}{t} \ln 2 + \frac{1}{t} \ln \left(1 + 1 + t + \frac{1}{2} t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right) \\ &= -\frac{1}{t} \ln 2 + \frac{1}{t} \ln \left(2 + t + \frac{1}{2} t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right) \\ &= -\frac{1}{t} \ln 2 + \frac{1}{t} \ln 2 + \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right) \\ &= \frac{1}{t} \ln(1 + X)\end{aligned}$$

avec $X = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$. Par la question 1, on a donc

$$\begin{aligned}\Phi_Z(t) &= \frac{1}{t} \times \left(X - \frac{1}{2} X^2 + o_{X \rightarrow 0}(X^2) \right) \\ &= \frac{1}{t} \times \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}t^2 \right) + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}t + o_{t \rightarrow 0}(t)\end{aligned}$$

Comme Φ_Z admet un $DL_1(0)$, Φ_Z se prolonge en une fonction dérivable en 0 en posant $\Phi_Z(0) = \frac{1}{2}$, et on a de plus $\Phi'_Z(0) = \frac{1}{8}$. Ainsi, Φ_Z est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Étude générale. On suppose pour la suite que $k \geq 2$.

- (a) Déterminer un développement limité de Φ_X à l'ordre 1 en 0 .

Solution: Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Par la question 1,

$$\begin{aligned}
 \Phi_X(t) &= \frac{1}{t} \ln \left(\sum_{i=1}^k p_i e^{x_i t} \right) \\
 &= \frac{1}{t} \ln \left(\sum_{i=1}^k p_i \left(1 + x_i t + \frac{x_i^2}{2} t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{t} \ln \left(\sum_{i=1}^k p_i + t \sum_{i=1}^k p_i x_i + \frac{1}{2} t^2 \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right) \\
 &= \frac{1}{t} \ln \left(1 + t \mathbb{E}(X) + \frac{1}{2} t^2 \mathbb{E}(X^2) + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right) \quad \text{par la formule de transfert} \\
 &= \frac{1}{t} \ln(1 + X)
 \end{aligned}$$

avec $X = t \mathbb{E}(X) + \frac{1}{2} t^2 \mathbb{E}(X^2) + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \Phi_X(t) &= \frac{1}{t} \left(X - \frac{X^2}{2} + o_{X \rightarrow 0}(X^2) \right) \\
 &= \frac{1}{t} \left(t \mathbb{E}(X) + \frac{1}{2} t^2 \mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{2} \mathbb{E}(X) t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right) \\
 &= \mathbb{E}(X) + \frac{1}{2} t \times (\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) + o_{t \rightarrow 0}(t) \\
 &= \boxed{\mathbb{E}(X) + \frac{1}{2} t \times \mathbb{V}(X) + o_{t \rightarrow 0}(t)}
 \end{aligned}$$

- (b) En déduire que Φ_X peut être prolongée en une fonction $\tilde{\Phi}_X$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Solution: Il est clair que Φ_X est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Comme Φ_X admet un DL₁(0), Φ_X se prolonge en une fonction dérivable en 0 en posant $\tilde{\Phi}_X(0) = \mathbb{E}(X)$, et on a de plus $\tilde{\Phi}'_X(0) = \frac{1}{2} \mathbb{V}(X)$. Ainsi, $\tilde{\Phi}_X$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- (c) Montrer que $\tilde{\Phi}_X(0)$ est égal à $\mathbb{E}(X)$, l'espérance de la variable aléatoire X .

Solution: Cela découle de la question précédente. On a $\tilde{\Phi}_X(0) = \boxed{\mathbb{E}(X)}$

- (d) Reconnaître $\tilde{\Phi}'_X(0)$.

Solution: Cela découle de la question b). On a $\tilde{\Phi}'_X(0) = \boxed{\frac{1}{2}\mathbb{V}(X)}$

(e) Déterminer les limites de $\tilde{\Phi}_X$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution: Par définition :

$$\tilde{\Phi}_X(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\sum_{i=1}^k p_i e^{x_i t} \right)$$

Comme $x_1 < \dots < x_k$, lorsque t tend vers $+\infty$, on a, pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$,

$$e^{x_i t} = o_{t \rightarrow 0} (e^{x_k t})$$

De sorte que l'on peut prédire quel sera le terme prédominant et faire une réécriture adéquate :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_X(t) &= \frac{1}{t} \ln \left(p_k e^{x_k t} \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p_i}{p_k} e^{(x_i - x_k)t} \right) \right) \\ &= \frac{1}{t} \ln (p_k e^{x_k t}) + \frac{1}{t} \ln \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p_i}{p_k} e^{(x_i - x_k)t} \right) \\ &= x_k + \frac{1}{t} \ln p_k + \frac{1}{t} \ln \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p_i}{p_k} e^{(x_i - x_k)t} \right) \end{aligned}$$

Or, $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{p_i}{p_k} e^{(x_i - x_k)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\Phi}_X(t) = \boxed{x_k}$$

Par le même raisonnement, en factorisant par $p_1 e^{x_1 t}$, on trouve que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\Phi}_X(t) = \boxed{x_1}$$

(f) La fonction $\tilde{\Phi}_X$ peut-elle être impaire? On justifiera soigneusement la réponse proposée.

Solution: Supposons par l'absurde que $\tilde{\Phi}_X$ soit impaire. On aurait en particulier $\tilde{\Phi}_X(0) = \mathbb{E}(X) = 0$. Or, comme $x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_k$ sont positifs et que $x_1 < x_k$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i \geq p_k x_k > p_k x_1 \geq 0$$

Ainsi, $\mathbb{E}(X) > 0$, ce qui est absurde. Donc $\tilde{\Phi}_X$ n'est pas impaire.

4. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Déterminer une relation entre $\Phi_X(t)$ et $\mathbb{E}(e^{tX})$, espérance de la variable aléatoire e^{tX} .

Solution: Par la formule de transfert, on a

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{i=1}^k p_i e^{x_i t}$$

Donc on obtient que

$$\Phi_X(t) = \boxed{\frac{1}{t} \ln (\mathbb{E}(e^{tX}))}$$

5. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes finies, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et indépendantes. Trouver une relation entre Φ_{X+Y} , Φ_X et Φ_Y .

Solution: On a

$$\begin{aligned} \Phi_{X+Y}(t) &= \frac{1}{t} \ln (\mathbb{E}(e^{t(X+Y)})) \\ &= \frac{1}{t} \ln (\mathbb{E}(e^{tX} e^{tY})) \\ &= \frac{1}{t} \ln (\mathbb{E}(e^{tX}) \mathbb{E}(e^{tY})) \end{aligned}$$

car X et Y sont indépendantes. Ainsi :

$$\begin{aligned} \Phi_{X+Y}(t) &= \frac{1}{t} \ln (\mathbb{E}(e^{tX})) + \frac{1}{t} \ln (\mathbb{E}(e^{tY})) \\ &= \boxed{\Phi_X(t) + \Phi_Y(t)} \end{aligned}$$