

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES - MP

m.laamoum2@gmail.com¹

EXERCICE 1

Soit $n \geq 5$. $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_{n-1})$ avec $P_j(X) = X^j$. L'endomorphisme u est défini par $u(P)(X) = P(X+1)$.

1 ▷ Étude de u .

1.1. Soient $P, Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$u(\lambda P + Q)(X) = (\lambda P + Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) = \lambda u(P)(X) + u(Q)(X).$$

Donc u est linéaire. De plus, si $\deg(P(X)) \leq n-1$, alors $\deg(P(X+1)) = \deg(P(X)) \leq n-1$, donc u est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

1.2. Expression de $u(P_j)$ dans $\mathcal{B}$. On a $u(P_j)(X) = (X+1)^j$. Par la formule du binôme de Newton :

$$u(P_j)(X) = (X+1)^j = \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} X^m = \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} P_m(X).$$

Donc dans la base $\mathcal{B}$: $u(P_j) = \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} P_m$, pour $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

1.3. La matrice M est donc triangulaire supérieure :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & \binom{j-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

j -ième
↓

1.4. M est triangulaire supérieure avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1. Donc : $\chi_u(X) = (X-1)^n$.

1.5. On a $\text{Sp}(u) = \{1\}$. Si u est diagonalisable alors $u = \text{id}$, absurde (car $n > 1$).

Donc u n'est pas diagonalisable.

¹ <https://tinyurl.com/hb8n2vr9>

1.6. On a $\det(u) = \det(M) = 1$, donc u est un endomorphisme inversible, ainsi u est un automorphisme.

Comme $u(P)(X) = P(X+1)$ alors $u^{-1}(P)(X) = P(X-1)$.

1.7. M^{-1} est la matrice de u^{-1} dans $\mathcal{B}$. On a

$$u^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^j = \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} (-1)^{j-m} X^m = \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} (-1)^{j-m} P_m(X)$$

donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \overset{j\text{-ième}}{\downarrow} (-1)^{j-1} & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & (-1)^j \binom{j-1}{1} & \cdots & (-1)^n \binom{n-1}{1} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.8. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a par récurrence : $\boxed{u^k(P)(X) = P(X+k)}$.

2 $\triangleright$ Soit $\Delta = u - \text{id}$.

2.1. Par le théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_u(u) = 0$. On a $\chi_u(X) = (X-1)^n$ donc $(u - \text{id})^n = 0$. Ainsi $\Delta^n = 0$ et Δ est nilpotent.

2.2. On a $\text{Sp}(\Delta) = \{0\}$. Si Δ est diagonalisable alors $\Delta = 0$ et $u = \text{id}$, absurde. Donc Δ n'est pas diagonalisable.

3 $\triangleright$ On a $\Delta = u - \text{id}$ est nilpotent d'indice n , donc $\Delta^n = (u - \text{id})^n = 0$.

La formule du binôme donne :

$$(u - \text{id})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u^k = 0.$$

On l'applique à $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, avec $u^k(P)(X) = P(X+k)$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k) = 0.$$

Le terme $k = n$ donne $\binom{n}{n} (-1)^0 P(X+n) = P(X+n)$, et les coefficients des autres termes sont dans $\mathbb{Z}$.

On a donc : $\boxed{P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k) = 0}$.

EXERCICE 2

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ pour $s > 1$, et $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

1 $\triangleright$ On a $\frac{1}{n^2 + a^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par comparaison, la série $\sum \frac{1}{n^2 + a^2}$ converge.

2 $\triangleright$ Soit $f : t \mapsto \frac{\sin(at)}{e^t - 1}$.

• En 0 :

On a $e^t - 1 \underset{t \rightarrow 0^+}{=} t + o(t)$ et $\sin(at) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} at + o(t)$, donc $f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\rightarrow} a$.
 f est prolongeable par continuité en 0. Donc elle est intégrable sur $]0, 1]$.

• En $+\infty$:

On a $\left| \frac{\sin(at)}{e^t - 1} \right| \leq \frac{1}{e^t - 1}$ et $\frac{1}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$.

Comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ l'est aussi.

Par comparaison f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

3 $\triangleright$ Pour $t > 0$, on a $e^{-t} \in]0, 1[$. Donc

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kt}$$

4 $\triangleright$ On a, pour $k > 0$, $|\sin(at) e^{-kt}| \leq e^{-kt}$ donc l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \sin(at) e^{-kt} dt$ converge.

On a

$$I = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{iat} e^{-kt} dt \right) = \operatorname{Im} \left(\left[\frac{1}{-k + ia} e^{(ia-k)t} \right]_0^{+\infty} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{k - ia} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{k + ia}{a^2 + k^2} \right)$$

Ainsi : $\boxed{\int_0^{+\infty} (\sin(at)) e^{-kt} dt = \frac{a}{a^2 + k^2}}.$

5 $\triangleright$ • Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, par le T.A.F entre 0 et x , il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $|\sin x| = |\cos(c) x| \leq |x|$. D'où le résultat.

• On utilise le théorème d'intégration des séries de fonctions :

Posons $f_n : t \mapsto \sin(at) e^{-nt}$, $t \in]0, +\infty[$.

► Chaque f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.

D'après Q4 : $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{a}{a^2 + n^2}$, pour tout $n \geq 1$.

► D'après Q4, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers $f : t \mapsto \frac{\sin(at)}{e^t - 1}$.

► Convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$:

On a pour $t \geq 0$

$$|f_n(t)| = |\sin(at) e^{-nt}| \leq |at| e^{-nt}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq |a| \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt$$

On intègre par parties :

$$\int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \underbrace{\left[\frac{-t e^{-nt}}{n} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq \frac{|a|}{n^2}$$

Par suite $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge .

Le théorème d'intégration des séries de fonctions , permet d'invertir $\sum$ et $\int$:

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}$$

Ainsi $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1} dt = a \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2}} .$

6 $\triangleright$ Posons pour $k \geq 1$ et $x \in]0, +\infty[$, $u_k(x) = \frac{1}{x^2 + k^2}$.

On a $|u_k(x)| \leq \frac{1}{k^2}$, donc la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge normalement et uniformément sur $]0, +\infty[$.

Chaque u_k admet une limite en 0 , le théorème d'interversion des limites permet d'écrire

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2 + k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Donc : $\boxed{\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} = \frac{\pi^2}{6}} .$

7 $\triangleright$ **Développement en série entière de $H : a \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1} dt$.**

7.1. Soit $a \in]-1, 1[$ et $k \geq 1$: On a

$$\frac{1}{a^2 + k^2} = \frac{1}{k^2 \left(1 + \left(\frac{a}{k}\right)^2\right)}$$

Pour $|a| < 1$ et $k \geq 1$, $\left|\frac{a}{k}\right| \leq |a| < 1$, donc :

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{a}{k}\right)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n} .$$

D'où $\boxed{\frac{1}{a^2 + k^2} = \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{k}\right)^{2n}} .$

7.2. Soit $a \in]-1, 1[$. D'après les questions 5 et 7.1 :

$$H(a) = a \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} = a \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{k^{2n+2}} .$$

Pour intervertir les deux sommes on montre la sommabilité de la famille : $u = \left((-1)^n \frac{a^{2n}}{k^{2n+2}} \right)_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$.

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé la série $\sum_{n \geq 0} \frac{|a|^{2n+1}}{k^{2n+2}}$ converge (elle est géométrique) et de somme $\sigma_k = \frac{|a|}{k^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{k}\right)^2}$.
- On a $\sigma_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|a|}{k^2}$, donc la série $\sum_{k \geq 1} \sigma_k$ converge .

La famille u est donc sommable, ce qui permet d'écrire

$$H(a) = a \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{k^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a^{2n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n+2}}$$

$$\text{Ainsi } \forall a \in]-1, 1[, \quad H(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) a^{2n+1}.$$

7.3. H est définie, sur $] -1, 1[$, comme la somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) a^{2n+1}$.

Le rayon de convergence R de cette série entière vérifie $R \geq 1$. La somme de cette série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$, en particulier sur $] -1, 1[$. Donc H est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

7.4. On sait que le p -ième coefficient de H vaut $\frac{H^{(p)}(0)}{p!}$.

H e

7.5. étant impaire donc

$$H^{(p)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 2n \\ (-1)^n (2n+1)! \zeta(2n+2) & \text{si } p = 2n+1 \end{cases}$$

8 ▷ Posons $g : t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ pour $t \in]0, 1[$.

• En $t = 1$:

On a, $\ln t = \ln(1 + (t-1)) = t-1 + o(t-1)$.

Donc $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} 1$, g est prolongeable par continuité en 0, par suite elle est intégrable au voisinage de 1.

• En $t = 0^+$: On a $g(t) \sim -\ln t$. Donc $\sqrt{t}g(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0, donc g est intégrable au voisinage de 0.

Ainsi g est intégrable sur $]0, 1[$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt$ est convergente.

9 ▷ Soit $p \in \mathbb{N}$, la fonction $h : t \mapsto t^p \ln t$ est continue sur $]0, 1[$.

On a $\sqrt{t}h(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$, donc h est intégrable sur $]0, 1[$. D'où la convergence de l'intégrale I_p .

10 ▷ Par intégration par parties :

$$I_p = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \ln t \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{t^{p+1}}{p+1} \cdot \frac{1}{t} dt \right) = -\frac{1}{p+1} \int_0^1 t^p dt = -\frac{1}{(p+1)^2}.$$

$$\text{Ainsi } I_p = -\frac{1}{(p+1)^2} \text{ pour } p \in \mathbb{N}.$$

11 ▷ On utilise le théorème d'intégration des séries de fonctions :

• Pour $t \in]0, 1[$, on a :

$$\frac{\ln t}{t-1} = -\ln t \sum_{p=0}^{+\infty} t^p = -\sum_{p=0}^{+\infty} t^p \ln t.$$

Posons $f_n : t \mapsto -t^n \ln t$, pour $t \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$.

• D'après Q9, chaque f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$ et

$$\int_0^1 f_n(t) dt = -I_n, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

• On a $\int_0^1 |f_n(t)| dt = -I_n = \frac{1}{(n+1)^2}$. Donc la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^1 |f_n(t)| dt$ converge.

Le théorème d'intégration des séries de fonctions, permet d'invertir $\sum$ et $\int$:

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+n)^2}$$

Donc : $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} .$

12 $\triangleright$ On sait que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Donc : $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \frac{\pi^2}{6}} .$

EXERCICE 3

Pour X variable aléatoire discrète finie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\Phi_X(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\sum_{i=1}^k p_i e^{x_i t} \right)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$, avec $0 \leq x_1 < \dots < x_k$ et $p_i > 0 \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

1 $\triangleright$ **Question de cours : développements limités en 0.**

- $e^{at} = \sum_{k=0}^n \frac{a^k t^k}{k!} + o(t^n)$.
- $\ln(1+at) = at - \frac{a^2 t^2}{2} + o(t^2)$.

2 $\triangleright$ **Étude d'exemples.**

2.1. X est une variable aléatoire certaine à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si $k \geq 2$, alors il existe $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ tel que $p_j = \mathbb{P}(X = x_j) = 1$. Par suite $p_i = 0$ pour $i \neq j$. Absurde (car $p_i > 0 \forall i$), donc $k = j = 1$.

Ainsi :

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{t} \ln(e^{x_1 t}) = x_1 .$$

2.2. Soit Z telle que : $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}$.

2.2.1. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\Phi_Z(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{1 + e^t}{2} \right) .$$

2.2.2. Limite de $\Phi_Z(t)$ quand $t \rightarrow 0$. On a

$$\frac{1 + e^t}{2} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o(t^2) .$$

Donc :

$$\ln \left(\frac{1 + e^t}{2} \right) = \ln \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o(t^2) \right) = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{2} \right)^2 + o(t^2) = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2) .$$

Ainsi

$$\Phi_Z(t) = \frac{1}{2} + \frac{t}{8} + o(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

On prolonge Φ_Z par :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_Z : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \Phi_Z(t) & \text{si } t \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a :

$$\frac{\tilde{\Phi}_Z(t) - \tilde{\Phi}_Z(0)}{t} = \frac{\Phi_Z(t) - 1/2}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{8} .$$

$\tilde{\Phi}_Z$ est dérivable en 0 avec $\tilde{\Phi}'_Z(0) = \frac{1}{8}$.

Comme Φ_Z est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors $\tilde{\Phi}_Z$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3 ▷ Étude générale ($k \geq 2$).

3.1. Posons $f(t) = \sum_{i=1}^k p_i e^{x_i t}$. Par DL de $t \mapsto e^{x_i t}$ à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=1}^k p_i \left(1 + x_i t + \frac{x_i^2 t^2}{2} + o(t^2) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k p_i + t \sum_{i=1}^k p_i x_i + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 + o(t^2) \\ &= 1 + \mathbb{E}(X) t + \frac{\mathbb{E}(X^2)}{2} t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

Donc :

$$\ln f(t) = \left(\mathbb{E}(X) t + \frac{\mathbb{E}(X^2)}{2} t^2 \right) - \frac{(\mathbb{E}(X))^2}{2} t^2 + o(t^2) = \mathbb{E}(X) t + \frac{\text{Var}(X)}{2} t^2 + o(t^2).$$

Ainsi : $\boxed{\Phi_X(t) = \frac{\ln f(t)}{t} = \mathbb{E}(X) + \frac{\text{Var}(X)}{2} t + o(t)}$.

3.2. On prolonge Φ_Z par :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_Z : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \Phi_Z(t) & \text{si } t \neq 0 \\ \mathbb{E}(X) & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, $\frac{\Phi_X(t) - \mathbb{E}(X)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\text{Var}(X)}{2}$, donc $\tilde{\Phi}_X$ est dérivable en 0 avec $\tilde{\Phi}'_X(0) = \frac{\text{Var}(X)}{2}$.

Pour $t \neq 0$, Φ_X est dérivable (composée de fonctions dérivables, et $f(t) > 0$). Donc $\tilde{\Phi}_X$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3.3. D'après ce qui précède, $\tilde{\Phi}_X(0) = \mathbb{E}(X)$.

3.4. On a $\tilde{\Phi}'_X(0) = \frac{\text{Var}(X)}{2}$.

3.5. • En $+\infty$:

Comme $x_k = \max_{1 \leq i \leq k} (x_i)$, alors

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\sum_{i=1}^k p_i e^{x_i t} \right) = \frac{1}{t} \left[x_k t + \ln \left(p_k + \sum_{i=1}^{k-1} p_i e^{(x_i - x_k)t} \right) \right].$$

On a $e^{(x_i - x_k)t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ pour $i < k$, donc

$$\frac{1}{t} \ln \left(p_k + \sum_{i=1}^{k-1} p_i e^{(x_i - x_k)t} \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi : $\boxed{\tilde{\Phi}_X(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} x_k = \max_{1 \leq i \leq k} (x_i)}$.

• En $-\infty$:

De même, $x_1 = \min_{1 \leq i \leq k} (x_i)$, on obtient $\boxed{\tilde{\Phi}_X(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} x_1 = \min_{1 \leq i \leq k} (x_i)}$.

3.6. Si $\tilde{\Phi}_X$ est impaire, alors $\tilde{\Phi}_X(0) = \mathbb{E}(X) = 0$.

On a X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ avec $0 \leq x_1 < \dots < x_k$ et $p_i > 0$, donc

$$\mathbb{E}(X) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k p_i x_i = 0 \Leftrightarrow p_i x_i = 0, \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket \Leftrightarrow x_i = 0, \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$$

Si $k = 1$, alors $X = 0$.

Si $k \geq 2$, alors $0 \leq x_1 < x_2 = 0$, ce qui est absurde.

Donc $\widetilde{\Phi}_X$ est impaire ssi $X = 0$.

4 ▷ Par le théorème du transfert :

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{i=1}^k p_i e^{tx_i}.$$

$$\text{Donc } \ln(\mathbb{E}(e^{tX})) = \ln\left(\sum_{i=1}^k p_i e^{x_i t}\right) = t \Phi_X(t).$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{\Phi_X(t) = \frac{\ln(\mathbb{E}(e^{tX}))}{t} \quad \text{ou bien} \quad \mathbb{E}(e^{tX}) = e^{t \Phi_X(t)}}.$$

5 ▷ Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Puisque X et Y sont indépendantes, alors e^{tX} et e^{tY} sont indépendantes et on a :

$$\mathbb{E}(e^{t(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{tX} \cdot e^{tY}) = \mathbb{E}(e^{tX}) \cdot \mathbb{E}(e^{tY}).$$

Donc :

$$e^{t \Phi_{X+Y}(t)} = e^{t \Phi_X(t)} \cdot e^{t \Phi_Y(t)} = e^{t(\Phi_X(t) + \Phi_Y(t))}.$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\forall t \in \mathbb{R}^*, \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) + \Phi_Y(t)}.$$

FIN