

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES - MPI

m.laamoum2@gmail.com¹

EXERCICE 1

Questions préliminaires

1 ▷ Soit $n \geq 2$. La fonction $\varphi(t) = t^n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[$. On a $\varphi''(t) = n(n-1)t^{n-2} > 0$ pour tout $t \in]0, 1[$, ce qui prouve que φ est strictement convexe sur $]0, 1[$.

2 ▷ Soit $(x_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ des réels de $]0, 1[$ et $(\lambda_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ des réels positifs vérifiant $\sum_{j=1}^r \lambda_j = 1$.

L'inégalité de Jensen pour φ convexe s'écrit :

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^r \lambda_j \varphi(x_j)$$

soit ici :

$$\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j x_j\right)^n \leq \sum_{j=1}^r \lambda_j x_j^n.$$

3 ▷ Soient $p \geq 2$ et

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3.1. On a $J^2 = pJ$. Donc $P(X) = X^2 - pX$ est un polynôme annulateur de J de degré 2.

3.2. On a $\text{Sp}(J) \subset \{0, p\}$, posons m_0 et m_p les multiplicités de 0 et p (éventuellement nulles) avec $m_0 + m_p = p$.

On a $\text{Tr}(J) = 0 \cdot m_0 + p \cdot m_p = p$, donc $m_p = 1$ et $m_0 = p - 1$.

Par suite $\text{Sp}(J) = \{0, p\}$ et $\text{Sp}(I_p + J) = \{1, p + 1\}$

3.3. La matrice $I_p + J$ est symétrique réelle, de valeurs propres strictement positives, donc elle est définie positive. Ainsi $I_p + J \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

4 ▷ Une expression de l'espérance de X

4.1. Soit $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. $X_j(\Omega) = \{0, 1\}$.

$X_j(\omega) = 1$ si et seulement si α_j n'est jamais obtenu lors des n épreuves indépendantes. Chaque épreuve ne donne pas α_j avec probabilité $1 - x_j$, donc par indépendance :

$$\mathbb{P}(X_j = 1) = (1 - x_j)^n.$$

Et $\mathbb{P}(X_j = 0) = 1 - (1 - x_j)^n$. X_j suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $(1 - x_j)^n$.

¹ <https://tinyurl.com/hb8n2vr9>

4.2. X est le nombre de résultats qui n'ont jamais été obtenus. Or $X_j = 1$ si et seulement si α_j n'est jamais obtenu. Donc :
$$X = \sum_{j=1}^r X_j.$$

4.3. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^r X_j\right) = \sum_{j=1}^r \mathbb{E}(X_j).$$

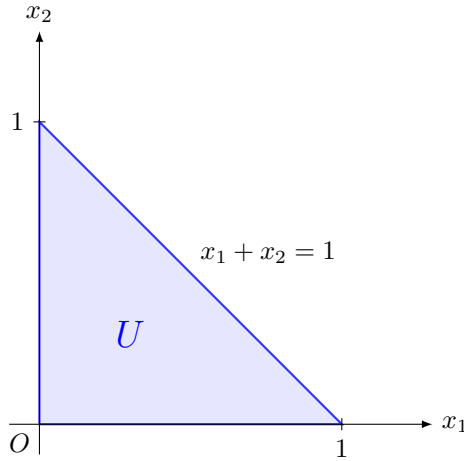
Or $\mathbb{E}(X_j) = \mathbb{P}(X_j = 1) = (1 - x_j)^n$, donc :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n.$$

5 ▷ Recherche du minimum de $\mathbb{E}(X)$.

5.1. Représentation graphique de U pour $r = 3$

Pour $r = 3$, $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 1\}$.

C'est l'intérieur du triangle de sommets $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ dans le plan.



5.2. • U est l'intersection des ensembles :

$$U = \bigcap_{k=1}^{r-1} \{x_k > 0\} \cap \left\{ \sum_{j=1}^{r-1} x_j < 1 \right\}.$$

Pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, les applications $\varphi_k : (x_1, \dots, x_{r-1}) \mapsto x_k$ et $\psi : (x_1, \dots, x_{r-1}) \mapsto \sum_{j=1}^{r-1} x_j$ (elles sont linéaires et polynomiales).

On a :

$$U = \bigcap_{k=1}^{r-1} \varphi_k^{-1}(]0, +\infty[) \cap \psi^{-1}(]0, 1[)$$

Chacun de ces ensembles est un ouvert, car il est l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une application continue. U est une intersection finie d'ouverts, donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}^{r-1}$.

- Pour tout $(x_1, \dots, x_{r-1}) \in U$, on a, pour tout k , on a $0 < x_k \leq \sum_{k=1}^{r-1} x_k < 1$, donc $U \subset]0, 1[^{r-1}$. Ainsi U est borné dans $\mathbb{R}^{r-1}$.

5.3. Pour $(x_1, \dots, x_{r-1}) \in U$, posons $x_r = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} x_j$. Comme $0 < \sum_{j=1}^{r-1} x_j < 1$, alors $x_r \in]0, 1[$.

Avec la contrainte $\sum_{j=1}^r x_j = 1$, on obtient :

$$h(x_1, \dots, x_{r-1}) = \sum_{j=1}^{r-1} (1 - x_j)^n + \left(\sum_{j=1}^{r-1} x_j \right)^n.$$

On a donc $\boxed{h(x_1, \dots, x_{r-1}) = \mathbb{E}(X)}$.

5.4. h est une fonction polynomiale donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{r-1}$. Par suite elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

5.5. Recherche des points critiques de h

5.5.1. Soit $j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ et $m = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in U$.

La j -ième coordonnée du gradient de h en m est donnée par :

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(m) = -n(1 - x_j)^{n-1} + n \left(\sum_{i=1}^{r-1} x_i \right)^{n-1}$$

Comme $x_r = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} x_i$, on peut écrire :

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(m) = n \left((1 - x_r)^{n-1} - (1 - x_j)^{n-1} \right).$$

5.5.2. Un point $m \in U$ est critique si et seulement si : $\frac{\partial h}{\partial x_j}(m) = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, soit :

$$(1 - x_j)^{n-1} = (1 - x_r)^{n-1}, \quad \forall j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket.$$

Les x_j sont dans $]0, 1[$, donc :

$$x_j = x_r, \quad \forall j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket.$$

La contrainte donne :

$$x_j = \frac{1}{r}, \quad \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket.$$

Ainsi l'unique point critique de h sur U est $b = (\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r}) \in \mathbb{R}^{r-1}$.

5.6. Conclusion

5.6.1. Matrice Hessienne de h en b :

Pour $j, k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ on a :

$$h(x_1, \dots, x_{r-1}) = \sum_{j=1}^{r-1} (1 - x_j)^n + \left(\sum_{j=1}^{r-1} x_j \right)^n \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial x_j}(m) = -n(1 - x_j)^{n-1} + n \left(\sum_{i=1}^{r-1} x_i \right)^{n-1}$$

▷ Si $j = k$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} = n(n-1)(1 - x_j)^{n-2} + n(n-1) \left(\sum_{i=1}^{r-1} x_i \right)^{n-2}.$$

▷ Si $j \neq k$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k} = n(n-1) \left(\sum_{i=1}^{r-1} x_i \right)^{n-2}.$$

En b , $x_i = \frac{1}{r}$ pour tout $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, alors :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(b) = 2n(n-1) \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{n-2}$$

et

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k}(b) = n(n-1) \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{n-2}.$$

Posons $a = n(n-1) \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{n-2}$. La matrice Hessienne de h en b est donc :

$$H_h(b) = \begin{pmatrix} 2a & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 2a \end{pmatrix} = a I_{r-1} + a J_{r-1} = \alpha(I_{r-1} + J_{r-1}),$$

On a $H_h(b) = a I_{r-1} + a J_{r-1} = \alpha(I_{r-1} + J_{r-1})$, avec $J_{r-1} = (1) \in \mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$.

5.6.2. D'après la question préliminaire 3.3, $I_{r-1} + J_{r-1} \in \mathcal{S}_{r-1}^{++}(\mathbb{R})$ (ici $p = r-1 \geq 2$).

Comme $a = n(n-1) \left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2} > 0$, alors :

$$H_h(b) = \alpha(I_{r-1} + J_{r-1}) \in \mathcal{S}_{r-1}^{++}(\mathbb{R}).$$

Donc b est un minimum local de h .

Ainsi $\mathbb{E}(X)$ admet un minimum local pour $x_1 = \cdots = x_r = \frac{1}{r}$. Cette valeur minimale de h est égale à $h(\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r}) = r(1 - \frac{1}{r})^n$.

5.6.3. Montrons que $\mathbb{E}(X)$ est minimale si et seulement si $x_1 = \cdots = x_r = \frac{1}{r}$.

On applique l'inégalité de Jensen (question 2) à la fonction convexe $\varphi(t) = t^n$ avec les poids $\lambda_j = \frac{1}{r}$ et les points $t_j = 1 - x_j \in]0, 1[$:

$$\varphi\left(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^r (1 - x_j)\right) \leq \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \varphi(1 - x_j),$$

soit :

$$\left(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^r (1 - x_j)\right)^n \leq \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n.$$

Or $\sum_{j=1}^r (1 - x_j) = r - \sum_{j=1}^r x_j = r - 1$. Donc :

$$\left(\frac{r-1}{r}\right)^n \leq \frac{1}{r} \mathbb{E}(X),$$

soit :

$$\mathbb{E}(X) \geq r\left(1 - \frac{1}{r}\right)^n.$$

Donc la valeur minimale globale de $\mathbb{E}(X)$ est $r\left(1 - \frac{1}{r}\right)^n$, atteinte si et seulement si $x_1 = \cdots = x_r = \frac{1}{r}$.

EXERCICE 2

Question de cours

1 ▷ La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.

2 ▷ La série entière $\sum_{n \geq 0} t^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, converge sur $] -1, 1[$, et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \quad |t| < 1.$$

3 ▷ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ fixé, on a :

$$\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} = \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Donc :

$$\left| \frac{2x}{x^2 - n^2} \right| = \frac{2|x|}{n^2 - x^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2|x|}{n^2}. \quad (\text{car } x \neq 0)$$

Par comparaison avec la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$, la série $\sum \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right)$ est absolument convergente.

Donc $E_1(x)$ est bien défini.

4 ▷ Soit $k \geq 2$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4.1. On a

$$\left| \frac{1}{(x-n)^k} \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^k} \text{ et } \left| \frac{1}{(x+n)^k} \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^k}$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^k}$ converge, donc par comparaison, les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x-n)^k}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)^k}$ convergent absolument.

4.2. Comme $x \neq 0$ et les deux séries convergent, alors $E_k(x)$ est bien définie.

5 ▷ Soit $k \in \mathbb{N}^*$:

5.1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors $x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On a :

$$E_k(x+1) = \frac{1}{(x+1)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1-n)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1+n)^k}.$$

Posons pour la première somme $m = n-1$ et pour la deuxième $m = n+1$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1-n)^k} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(x-m)^k} = \frac{1}{x^k} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-m)^k} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1+n)^k} = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^k}.$$

Donc :

$$E_k(x+1) = \frac{1}{(x+1)^k} + \frac{1}{x^k} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-m)^k} + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^k} = \frac{1}{x^k} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-m)^k} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^k}.$$

Ainsi $E_k(x+1) = E_k(x)$. E_k est bien 1-périodique.

5.2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donc $-x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On a

$$E_k(-x) = \frac{1}{(-x)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-x-n)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-x+n)^k} = (-1)^k \left(\frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^k} \right).$$

Donc : $\boxed{E_k(-x) = (-1)^k E_k(x)}$. Ainsi E_k est de même parité que k .

6 ▷ Une relation de récurrence :

6.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$:

Prenons $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour $n \geq 1$ on a

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(x-n)^k} \right) = \frac{-k}{(x-n)^{k+1}}$$

Si $x \in [a, b]$ alors $x-n \in [a-n, b-n]$. Comme $0 \notin [a-n, b-n]$ donc

$$0 < \min(|a-n|, |b-n|) \leq |x-n| \leq \max(|a-n|, |b-n|)$$

Ce qui donne

$$\left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(x-n)^k} \right) \right| \leq \frac{k}{(\min(|a-n|, |b-n|))^{k+1}}$$

Or $\min(|a-n|, |b-n|) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$, donc

$$\frac{k}{(\min(|a-n|, |b-n|))^{k+1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{k}{n^{k+1}}$$

La série $\sum \frac{1}{n^{k+1}}$ converge, la série $\sum \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(x-n)^k} \right)$ converge normalement et uniformément sur $[a, b]$. Ceci est valable pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donc par le théorème de dérivation des séries de fonctions, la fonction

$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^k}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^k} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-k}{(x-n)^{k+1}}.$$

De même pour $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^k}$, et pour le terme $x \mapsto \frac{1}{x^k}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

6.1.1. Ainsi, E_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et :

$$E'_k(x) = \frac{-k}{x^{k+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-k}{(x-n)^{k+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-k}{(x+n)^{k+1}} = -k E_{k+1}(x).$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad E'_k(x) = -k E_{k+1}(x)}$.

6.2. • D'après la question Q6.1, pour tout $k \geq 1$, E_k est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $E'_k = -k E_{k+1}$, donc E_k est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Soit $n \geq 1$. Supposons, pour tout $k \geq 1$, que E_k est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

La relation $E'_k = -k E_{k+1}$ donne E_k est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Ainsi par récurrence, la fonction E_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- On a $E'_1 = -E_2$. Supposons, pour $k \geq 1$, $E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}$. Par dérivation

$$-k E_{k+1}(x) = E'_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k)}.$$

$$\text{donc } E_{k+1} = \frac{(-1)^k}{k!} E_1^{(k)}.$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\forall k \geq 1, E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}}.$$

7 ▷ Pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\frac{x}{n}\right| \leq |x| < 1$, donc la série géométrique converge :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \frac{1}{n-x}.$$

8 ▷ Soit $n \geq 1$ et $x \in]-1, 1[$, d'après la question Q7 :

$$\frac{1}{n-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{n^{k+1}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{n^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{n^{k+1}}.$$

Donc :

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{n^{k+1}} (1 - (-1)^k) = 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{x^{2s-1}}{n^{2s}}.$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1}.$$

9 ▷ Pour $x \in]-1, 1[$, vérifions que la famille $u = \left(\frac{x^{2q-1}}{p^{2q}} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$.

- Pour $p \geq 1$ fixé, on a : $\frac{|x|^{2q-1}}{p^{2q}} = \frac{1}{p} \left(\frac{|x|}{p} \right)^{2q-1}$ et $\frac{|x|}{p} < 1$, donc $\sum_{q \geq 1} \frac{1}{p} \left(\frac{|x|}{p} \right)^{2q-1}$ converge, soit σ_p sa somme.

- On a

$$\sigma_p = \frac{|x|}{p^2} \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\frac{|x|}{p} \right)^{2(q-1)} = \frac{|x|}{p^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{|x|}{p} \right)^2}$$

donc $\sigma_p \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{|x|}{p^2}$ et la série $\sum_{p \geq 1} \sigma_p$ est convergente.

Ainsi la famille u est sommable, ce qui permet d'intervertir les sommes dans la formule de Q7 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{s=1}^{+\infty} 2x^{2s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2s}} = 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1}$$

On a

$$E_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = \frac{1}{x} - 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1}$$

$$\text{donc } \boxed{E_1(x) = \frac{1}{x} - 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1} \quad \forall x \in]-1, 1[}.$$

10 ▷ Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, 1[$, $x \neq 0$.

D'après la question Q6.2, $E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}$.

Dérivons la formule de la question Q9 :

- On a $\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$.

- Comme une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, alors :

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1} \right) = \sum_{s=1}^{+\infty} (2s-1)(2s-2) \cdots (2s-k+1) x^{2s-k} \zeta(2s) = \sum_{\substack{s=1 \\ (2s \geq k)}}^{+\infty} \frac{(2s-1)!}{(2s-k)!} \zeta(2s) x^{2s-k}$$

donc

$$E_1^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} - 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) (k-1)! \binom{2s-1}{k-1} x^{2s-k}.$$

Ainsi :

$$E_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}(x) = \frac{1}{x^k} + 2(-1)^k \sum_{\substack{s=1 \\ (2s \geq k)}}^{+\infty} \binom{2s-1}{k-1} \zeta(2s) x^{2s-k}.$$

EXERCICE 3

Soit la matrice M associée à $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^{n-1}$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1 ▷ **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**

1.1. La matrice M est symétrique et réelle, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable (dans une base orthonormée).

1.2. Posons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M .

Les colonnes $C_2, \dots, C_{n-1}$ sont colinéaires à C_1 , donc $\text{rg}(M) = \text{rg}(C_1, C_n)$. Comme $a_1 \neq 0$ donc C_1 et C_n sont libres.

Par suite $\text{rg}(M) = 2$.

1.3. On a $\text{rg}(M) = 2$ donc $\text{Ker}(M)$ est de dimension $n - 2 \geq 1$, donc 0 est une valeur propre de M , de multiplicité $m_0 \geq n - 2$.

Comme M est diagonalisable, la multiplicité d'une valeur propre coïncide avec la dimension du sous-espace propre associé, donc 0 est valeur propre de M d'ordre de multiplicité $m_0 = n - 2$.

1.4. On a 0 est racine d'ordre $n - 2$ de χ_M qui est de degré n . Donc $\chi_M(X) = X^{n-2} Q(X)$ avec $\deg(Q) = 2$ et $Q(0) \neq 0$.

Les racines, complexes, de Q sont deux valeurs propres non nulles de M .

1.5. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, on a $a_1 \neq 0$ donc

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(M) &\Leftrightarrow x_n = 0 \text{ et } a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_n = 0 \text{ et } x_1 = \frac{-a_2}{a_1} x_2 + \dots + \frac{-a_{n-1}}{a_1} x_{n-1} \\ &\Leftrightarrow X = x_2 \left(e_2 - \frac{a_2}{a_1} e_1 \right) + \dots + x_{n-1} \left(e_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_1} e_1 \right) \end{aligned}$$

On obtient une famille génératrice de $\text{Ker}(M)$ de cardinal $n - 2$, donc c'est une base de $\text{Ker}(M)$.

Ainsi une base du sous-espace propre associé à 0 est : $\left\{ a_j e_1 - a_1 e_j \mid j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \right\}$.

Plus précisément cette base est $(v_1, \dots, v_{n-2})$ avec :

$${}^t v_1 = (-a_2, a_1, 0, \dots, 0), \dots, {}^t v_j = (-a_{j+1}, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots, 0), \dots, {}^t v_{n-2} = (-a_{n-1}, 0, \dots, 0, a_1, 0).$$

1.6. Soit $\lambda \neq 0$ et $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. Le système $MX = \lambda X$ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 x_n & = & \lambda x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} x_n & = & \lambda x_{n-1} \\ a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n & = & \lambda x_n \end{array} \right. \quad (1)$$

Comme $\lambda \neq 0$ alors $x_i = \frac{a_i x_n}{\lambda}$ pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

La dernière équation donne :

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j \cdot \frac{a_j x_n}{\lambda} + a_n x_n = \lambda x_n.$$

Si $x_n = 0$ alors $x_i = 0$ pour tout i , contradiction avec $X \neq 0$, donc $x_n \neq 0$. Ce qui donne :

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 + a_n = \lambda.$$

Ainsi λ_1 et λ_2 sont les deux racines de $\lambda^2 - a_n \lambda - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0$ (2).

1.7. D'après la question Q1.6, pour $\lambda = \lambda_i \neq 0$, le système (1) donne $x_j = \frac{a_j x_n}{\lambda_i}$ pour $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

En prenant $x_n = \lambda_i$, on obtient le vecteur propre :

$$v_{\lambda_i} = {}^t(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \lambda_i).$$

▷ Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$: les sous-espaces propres sont des droites, $\text{Vect}\{v_{\lambda_1}\}$ et $\text{Vect}\{v_{\lambda_2}\}$.

▷ Si $\lambda_1 = \lambda_2$: alors le discriminant Δ de l'équation (2) est nul, or $\Delta = a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0$, donc $a_1 = 0$, ce qui est absurde. Ce cas est impossible.

1.8. P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de M , des questions Q1.5 et Q1.7 on a

$$P = \begin{pmatrix} -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & a_1 & a_1 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

On a alors $P^{-1}MP = \text{Diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, \lambda_1, \lambda_2)$.

2 ▷ Étude du cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2.1. Comme dans la question Q1 on a : $\chi_M(X) = X^{n-2}.Q(X)$ avec $Q(X) = X^2 - a_n X - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2$,

$\text{Sp}(M) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ avec $m_0 = \dim(\text{Ker}(M)) = n - 2$ et si $\lambda_i \neq 0$, $\dim(E_{\lambda_i}(M)) = 1$.

M est diagonalisable si, et seulement si, M admet deux valeurs propres non nulles et différentes.

Le théorème spectral ne s'applique pas. La diagonalisabilité dépend du spectre et des dimensions des sous-espaces propres.

Donc M est non diagonalisable si, et seulement si, $(\lambda_1 = 0 \text{ ou } \lambda_2 = 0)$ ou $(\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0)$. Ce qui est équivalent à Q admet une racine double ou une racine nulle.

Ainsi :

$$M \text{ non diagonalisable} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(0) = 0 \\ \text{ou} \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \\ \text{ou} \\ a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \end{cases}$$

2.2. Prenons $n = 3$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

Pour avoir M non diagonalisable, il suffit d'avoir $\sum_{j=1}^2 a_j^2 = 0$. Par exemple $a_1 = 1$, $a_2 = i$ et $a_3 = 0$.

Ainsi

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

$\chi_M(X) = X^3$ et M n'est pas diagonalisable.