

E3A-Polytech 2026

Épreuve spécifique - Filière MPI

Mathématiques - Durée 4h

Les calculatrices sont interdites. Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Exercice 1

Questions préliminaires

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Vérifier que $\varphi : t \mapsto t^n$ est une fonction convexe sur $]0, 1[$.

Correction :

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[$ et $\forall t \in]0, 1[, \varphi''(t) = n(n-1)t^{n-2} > 0$ donc φ est une fonction convexe sur $]0, 1[$.

2. Écrire l'inégalité de convexité de *Jensen* pour cette fonction.

Correction :

Soient $x_1, \dots, x_p$ des réels de l'intervalle $]0, 1[$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels positifs de somme 1. L'inégalité de Jensen pour la fonction φ , convexe sur $]0, 1[$, s'écrit :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi(x_i)$$

et plus précisément :

$$\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right)^n \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^n$$

3. Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et J la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- 3.1. Déterminer un polynôme annulateur de J de degré 2.

Correction :

Sans difficulté :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J^2 = \begin{pmatrix} p & \cdots & p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p & \cdots & p \end{pmatrix} = pJ$$

Ainsi, $J^2 - pJ = 0$: le polynôme $P(X) = X^2 - pX = X(X - p)$ est annulateur de J .

- 3.2. En déduire les valeurs propres possibles de $I_p + J$.

Correction :

Méthode 1 :

Soit λ un réel. λ est une valeur propre de $I_p + J$ si et seulement si il existe X non nul tel que $(I_p + J)X = \lambda X \Leftrightarrow JX = (\lambda - 1)X$.

Ainsi, λ est valeur propre de $I_p + J$ si et seulement si $\lambda - 1$ est valeur propre de J .

Les valeurs propres éventuelles de J sont à chercher parmi les racines de tout polynôme annulateur : d'après la question précédente, 0 et p sont les seules valeurs propres potentielles de J donc 1 et $p + 1$ sont celles de $I_p + J$.

Méthode 2 :

Soit Q le polynôme défini par $Q(X) = P(X - 1) = (X - 1)^2 - p(X - 1)$. Alors pour toute matrice carrée M , $Q(M) = P(M - I_p)$. En appliquant à la matrice $I_p + J$, on obtient $Q(I_p + J) = P(J) = 0$.

Le polynôme $(X - 1)^2 - p(X - 1) = (X - 1)(X - 1 - p)$ est annulateur de $I_p + J$, donc l'ensemble de ses racines contient les valeurs propres potentielles : seuls 1 et $p + 1$ peuvent être valeurs propres de $I_p + J$.

3.3. Justifier alors que la matrice $I_p + J$ appartient à $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $I_p + J$ est une matrice symétrique réelle définie positive.

Correction :

$I_p + J$ est une matrice symétrique réelle (somme de deux matrices symétriques) donc diagonalisable. Elle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives. Ces valeurs propres ne pouvant être que 1 et $p + 1$ d'après la question précédente, ce critère est vérifié et $I_p + J$ est définie positive.

Soient n et r deux entiers naturels avec $n \geq 2$ et $r \geq 3$.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents $(\alpha_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ de probabilités respectives $(x_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ avec : $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, x_j \in]0, 1[$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite au-dessus, ce qui définit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note X_j la variable aléatoire telle que $X_j(\Omega) = \{0, 1\}$, et pour tout $\omega \in \Omega$:

- $X_j(\omega) = 0$ si α_j est obtenu au moins une fois à l'issue de ces n épreuves,
- $X_j(\omega) = 1$ sinon, c'est-à-dire si α_j n'est jamais obtenu.

Enfin, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

4. Une expression de l'espérance de X

4.1. Soit $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Déterminer la loi de X_j .

Correction :

Puisque $X_j(\Omega) = \{0, 1\}$, on est dans le cadre d'une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(X_j = 1)$. Lorsqu'on réalise une fois l'épreuve aléatoire initiale, on n'obtient **pas** la valeur α_j avec une probabilité $1 - x_j$. Par indépendance, lorsqu'on réalise n fois cette expérience, on n'obtient jamais la valeur α_j avec une probabilité $(1 - x_j)^n$.

Ainsi, $X_j \sim \mathcal{B}((1 - x_j)^n)$.

4.2. Exprimer la variable aléatoire X à l'aide des variables $(X_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$.

Correction :

Chaque variable aléatoires X_j prend la valeur 1 lorsqu'on n'obtient jamais la valeur α_j , et X compte le nombre de valeurs non atteintes lors des n épreuves, donc $X = \sum_{j=1}^r X_j$.

4.3. Démontrer alors que l'espérance de la variable aléatoire X est : $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n$.

Correction :

Si une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre p , son espérance est p , ce qui

est le cas des variables aléatoires X_j . Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^r X_j \right) = \sum_{j=1}^r \mathbb{E}(X_j) = \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n$$

5. La suite de l'exercice consiste à rechercher les valeurs des réels x_j pour lesquelles l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est minimale.

Cela revient à dire que l'on cherche un minimum pour la fonction $f : (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mapsto \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n$ sous la contrainte :

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, x_k > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^r x_j = 1.$$

On pose $U = \left\{ (x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}, \forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, x_k > 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{r-1} x_j < 1 \right\}$.

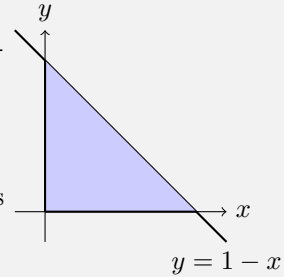
5.1. Représenter graphiquement U dans le plan, c'est-à-dire dans le cas où $r = 3$.

Correction :

Dans le cas où $r = 3$, avec les coordonnées (x, y) habituelles (plutôt que (x_1, x_2)) :

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

Il s'agit du domaine compris entre les deux axes de coordonnées et la droite d'équation $y = 1 - x$, bords non compris.



5.2. Justifier que U est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{r-1}$.

Correction :

Pour $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, définissons la forme-coordonnée $\left| \begin{array}{ccc} \varphi_k : & \mathbb{R}^{r-1} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & (x_1, \dots, x_{r-1}) & \mapsto x_k \end{array} \right.$. Elle est continue sur $\mathbb{R}^{r-1}$ car polynomiale. Alors $U_k = \{(x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}, x_k > 0\}$ est l'image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue φ_k : c'est un ouvert de $\mathbb{R}^{r-1}$.

Un raisonnement identique avec l'application $\varphi_r : (x_1, \dots, x_{r-1}) \mapsto \sum_{j=1}^r x_j - 1$ (toujours continue car polynomiale) et l'ouvert $] -\infty, 0[$ de $\mathbb{R}$ nous dit que $U_r = \left\{ (x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}, \sum_{j=1}^r x_j < 1 \right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{r-1}$.

Alors $U = U_1 \cap \dots \cap U_r$ est une intersection finie d'ouverts : c'est un ouvert de $\mathbb{R}^{r-1}$.

Il est immédiat que $(x_1, \dots, x_{r-1}) \in U \Rightarrow \forall j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, 0 < x_j < 1$ donc $\sup_{j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket} |x_j| \leq 1$: U est borné pour la norme infini, et par équivalence des normes en dimension finie ce caractère borné de dépend pas de la norme choisie.

5.3. Déterminer une fonction h , définie sur U , des $r-1$ variables $(x_j)_{j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket}$ telle que :

$$h(x_1, \dots, x_{r-1}) = \mathbb{E}(X).$$

Correction :

Par définition d'une loi de probabilité pour l'épreuve aléatoire initiale, on a $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, 0 \leq x_j \leq 1$ et $\sum_{j=1}^r x_j = 1 \Leftrightarrow x_r = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} x_j$.

L'énoncé décrit que pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket, 0 < x_j < 1$, que l'on exploite directement pour $(x_1, \dots, x_{r-1})$, et qui appliqué à $x_r = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} x_j$ donne $\sum_{j=1}^{r-1} x_j < 1$. Le $r-1$ -uplet $(x_1, \dots, x_{r-1})$ est donc bien un élément de U .

$$\text{Alors } \mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{r-1} (1 - x_j)^n + (1 - x_r)^n = \sum_{j=1}^{r-1} (1 - x_j)^n + \left(\sum_{j=1}^{r-1} x_j \right)^n.$$

La fonction $h : (x_1, \dots, x_{r-1}) \mapsto \sum_{j=1}^{r-1} (1 - x_j)^n + \left(\sum_{j=1}^{r-1} x_j \right)^n$ correspond au problème.

5.4. Prouver que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

Correction :

h est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

5.5. Recherche des points critiques de h

5.5.1. Soient $j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ et $m = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in U$.

Déterminer la j -ième coordonnée du vecteur gradient de la fonction h en m .

Correction :

Remarque : attention à bien changer l'indice de sommation dans l'expression de h , puisque j est ici fixé!

Par définition du vecteur gradient de la fonction h en m , sa j -ième coordonnée est :

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(m) = -n(1 - x_j)^{n-1} + n \left(\sum_{k=1}^{r-1} x_k \right)^{n-1}$$

5.5.2. Déterminer l'unique point critique b de h sur U .

Correction :

m est un point critique de h sur U si et seulement si $m \in U$ et $\nabla h(m) = 0$, ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, -n(1 - x_j)^{n-1} + n \left(\sum_{k=1}^{r-1} x_k \right)^{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, (1 - x_j)^{n-1} &= \left(\sum_{k=1}^{r-1} x_k \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, x_j &= 1 - \sum_{k=1}^{r-1} x_k = x_r \end{aligned}$$

Le seul point critique de h correspond à $x_1 = \dots = x_{r-1} = x_r$. Leur somme valant 1, on obtient $b = \left(\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r} \right)$ qui est bien un point de U (puisque la somme de ses coordonnées vaut $\frac{r-1}{r} < 1$).

5.6. Conclusion

5.6.1. Écrire la matrice Hessienne de h en b .

Correction :

La matrice Hessienne de h en un point m quelconque est la matrice :

$$H_h(m) = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(m) \right)_{1 \leq i, j \leq r-1}$$

Ainsi, en dérivant l'expression trouvée pour $\frac{\partial h}{\partial x_j}(m)$, et en vertu du théorème de Schwarz pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, on aura pour tous $i \neq j$ de $\llbracket 1, r-1 \rrbracket$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(m) = n(n-1)(1-x_i)^{n-2} + n(n-1) \left(\sum_{k=1}^{r-1} x_k \right)^{n-2}$$

et :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(m) = 0 + n(n-1) \left(\sum_{k=1}^{r-1} x_k \right)^{n-2}$$

Appliqué au point $b = \left(\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r} \right)$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(b) = n(n-1) \left(1 - \frac{1}{r} \right)^{n-2} + n(n-1) \left(\sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{r} \right)^{n-2} = 2n(n-1) \left(\frac{r-1}{r} \right)^{n-2}$$

et :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(b) = n(n-1) \left(\sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{r} \right)^{n-2} = n(n-1) \left(\frac{r-1}{r} \right)^{n-2}$$

On obtient ainsi $H_h(b) = n(n-1) \left(\frac{r-1}{r} \right)^{n-2} (I_p + J)$.

5.6.2. Démontrer alors que :

$$\mathbb{E}(X) \text{ admet un minimum local pour } x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}.$$

On pourra utiliser une question préliminaire.

Correction :

La matrice $I_p + J$ est définie positive, et la multiplication par le scalaire positif $n(n-1) \left(\frac{r-1}{r} \right)^{n-2}$ ne changeant pas ce caractère. La matrice $H_h(b)$ est donc définie positive, avec $b \in U$ ouvert : h présente en b un minimum local i.e. $\mathbb{E}(X)$ admet un minimum local lorsque $x_1 = \dots = x_{r-1} = x_r = \frac{1}{r}$.

5.6.3. En utilisant la convexité de la fonction φ définie dans la question préliminaire, démontrer que :

$$\mathbb{E}(X) \text{ est minimale si, et seulement si, } x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}.$$

Correction :

L'équivalence contient deux éléments :

- Le minimum local de l'espérance trouvé précédemment est en fait global.
- Cette valeur minimale n'est atteinte qu'au seul point $x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}$

Calculons la valeur du minimum local trouvé à la question précédente :

$$\mathbb{E}(X)_{min} = \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n = r \left(\frac{r-1}{r}\right)^n$$

Appliquons l'inégalité de la question 2. aux r réels $1 - x_1, \dots, 1 - x_r$, tous dans $]0, 1[$, et aux scalaires $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \frac{1}{r}$, positifs de somme 1 :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^r \frac{1}{r}(1 - x_j)\right)^n &\leq \sum_{j=1}^r \frac{1}{r}(1 - x_j)^n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{r^n} \left(\sum_{j=1}^r (1 - x_j)\right)^n &\leq \frac{1}{r} \mathbb{E}(X) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{r^n} \left(r - \sum_{j=1}^r x_j\right)^n &\leq \frac{1}{r} \mathbb{E}(X) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{r-1}{r}\right)^n &\leq \frac{1}{r} \mathbb{E}(X) \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}(X)_{min} &\leq \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

La valeur du minimum local de l'espérance est bien un minimum global.

Les paramètres de l'expérience aléatoire placent $(x_1, \dots, x_{r-1})$ dans U ouvert : s'il existe un extremum global, celui-ci sera alors local, donc en un point critique, avec comme seule possibilité le cas $x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}$. L'équivalence est bien vérifiée.

Exercice 2

Question de cours

1. Rappeler, sans démonstration, les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge.

Lorsqu'il y a convergence, on note $\zeta(x)$ sa somme.

Correction :

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.

2. Rappeler, sans démonstration, la somme et l'intervalle de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} t^n$.

Correction :

$\forall t \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$. La série diverge pour toutes les autres valeurs de t .

On rappelle que si f est une fonction infiniment dérivable sur une partie I de $\mathbb{R}$, alors, pour tout entier naturel p , $f^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de la fonction f avec la convention $f^{(0)} = f$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on note, lorsque cela existe :

$$E_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) \text{ et, pour } k \geq 2, E_k(x) = \frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^k}$$

3. Justifier l'existence de $E_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Correction :

Tout d'abord, pour tous $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, les dénominateurs x , $x - n$ et $x + n$ ne s'annulent pas.

Par ailleurs, on a $\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} = \frac{2x}{x^2 - n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-2x}{n^2}$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{-2x}{n^2}$ est convergente, son terme général est de signe constant au voisinage de $+\infty$, par le théorème d'équivalence pour les séries à termes de signe constant, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right)$ converge, ce qui garantit l'existence de $E_1(x)$.

4. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

4.1. Étudier la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x-n)^k}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)^k}$.

Correction :

On a $\left| \frac{1}{(x-n)^k} \right| = \frac{1}{n^k} \left| \frac{1}{(\frac{x}{n} - 1)^k} \right|$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(\frac{x}{n} - 1)^k} \right| = 1$ donc $\left| \frac{1}{(x-n)^k} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^k}$.

Puisque $k > 1$, le théorème d'équivalence pour les séries permet encore de conclure à la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{1}{(x-n)^k} \right|$ donc à l'absolue convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x-n)^k}$.

Le raisonnement est exactement le même pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)^k}$.

4.2. En déduire l'existence de $E_k(x)$ pour tout $k \geq 2$.

Correction :

Ici encore, les différents dénominateurs ne s'annulent jamais. La convergence des deux séries précédentes assure l'existence des deux sommes présentes dans la définition de $E_k(x)$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

5.1. Démontrer que la fonction E_k est 1-périodique.

Correction :

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Commençons par unifier les écritures pour ne pas avoir à traiter le cas $k = 1$ séparément : par somme de séries convergentes (question 4.1), on peut écrire pour $k \geq 2$:

$$E_k(x) = \frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^k} + \frac{1}{(x+n)^k} \right)$$

On peut à présent utiliser une seule formule pour tout $k \geq 1$.

Passons par des sommes partielles et posons, pour tout entier naturel $N \geq 1$,

$$E_{k,N}(x) = \frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{(x-n)^k} + \frac{1}{(x+n)^k} \right) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+n)^k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} E_k(x)$$

Alors :

$$E_{k,N}(x+1) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+1+n)^k} = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{(x+n)^k} = E_{k,N}(x) + \frac{1}{(x+N+1)^k} - \frac{1}{(x-N)^k}$$

En passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, les deux termes additionnels tendent vers 0 et il vient $E_k(x+1) = E_k(x)$, donc E_k est bien périodique de période 1.

5.2. Étudier la parité de la fonction E_k .

Correction :

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et tout $N \geq 1$:

$$E_{k,N}(-x) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(-x+n)^k} = \sum_{m=-N}^N \frac{1}{(-x-m)^k} = \sum_{m=-N}^N \frac{(-1)^k}{(x+m)^k} = (-1)^k E_{k,N}(x)$$

En passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on a $E_k(-x) = (-1)^k E_k(x)$ donc E_k est paire si k est pair, impaire si k est impair.

6. Une relation de récurrence

6.1. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction E_k est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad E'_k(x) = -kE_{k+1}(x).$$

Correction :

La 1-périodicité permet de restreindre l'intervalle d'étude à $]0, 1[$.

On pose pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in]0, 1[$, $f_n(x) = \frac{1}{(x-n)^k} + \frac{1}{(x+n)^k}$.

D'après la question 3., la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers sa somme

que l'on note $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^k} + \frac{1}{(x+n)^k} \right)$. Les fonctions f_n sont dérivables sur $]0, 1[$

avec $f'_n(x) = \frac{-k}{(x-n)^{k+1}} + \frac{-k}{(x+n)^{k+1}}$.

Nous allons montrer la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$.

Pour tout $x \in]0, 1[$, $|f'_n(x)| \leq \frac{k}{|x-n|^{k+1}} + \frac{k}{(x+n)^{k+1}}$.

Puisque $0 < x < 1$ et $n \geq 1$, on a $-n < x-n < 1-n \leq 0$ puis $0 \leq n-1 < |x-n| < n$ et enfin

$$\frac{k}{|x-n|^{k+1}} \leq \frac{k}{(n-1)^{k+1}}.$$

On a par ailleurs $\frac{k}{(x+n)^{k+1}} \leq \frac{k}{n^{k+1}}$.

On obtient ainsi une majoration indépendante de x : $|f'_n(x)| \leq \frac{k}{(n-1)^{k+1}} + \frac{k}{n^{k+1}}$. Puisque $k \geq 1$, le majorant est la somme de deux termes généraux de séries de Riemann convergentes, donc l'est aussi, la convergence normale sur $]0, 1[$ est assurée.

f , donc E_k est alors dérivable sur $]0, 1[$ avec pour tout $x \in]0, 1[$:

$$E'_k(x) = -\frac{k}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-k}{(x-n)^{k+1}} + \frac{-k}{(x+n)^{k+1}} = -kE_{k+1}(x)$$

Remarque : la majoration par $\frac{k}{(n-1)^{k+1}}$ pose un problème pour $n = 1$. On peut le résoudre en utilisant une convergence normale sur tout segment $[a, b]$ de $]0, 1[$, ou bien en isolant la fonction f_1 de la série de fonctions, ce qui ne change pas la dérivabilité globale de E_k .

6.2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction E_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que :

$$E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}$$

Correction :

D'après la question précédente, pour tout k , E_{k+1} est dérivable donc continue, et la relation $E'_k = -kE_{k+1}$ confère à E'_k la continuité donc à E_k la classe $\mathcal{C}^1$.

Cette relation se propage alors aux E'_k et les E_k deviennent de classe $\mathcal{C}^2$, et de proche en proche, on obtient la classe $\mathcal{C}^\infty$.

Montrons par récurrence sur k la propriété pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}$.

Initialisation :

Pour $k = 1$, cette relation s'écrit $E_1 = E_1$, elle est donc vérifiée.

Hérédité :

Supposons la relation $E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}$ vérifiée pour un certain rang $k \geq 1$, alors en utilisant la question précédente :

$$E_{k+1} = -\frac{1}{k} E'_k = -\frac{1}{k} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)} \right)' = \frac{(-1)^k}{k!} E_1^{(k)}$$

La formule est alors vérifiée au rang $k + 1$. Hérédité prouvée, récurrence achevée.

7. Montrer que pour tout x de $] -1, 1[$ et pour tout entier naturel non nul n , la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{n^{k+1}}$ converge et calculer sa somme.

Correction :

Soit $x \in] -1, 1[$ fixé. En considérant une série comme une suite, on peut écrire $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{x}{n} \right)^k$.
 $n \in \mathbb{N}^*$ et x est dans $] -1, 1[$ donc $\frac{x}{n}$ également. Alors la série $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{x}{n} \right)^k$ converge et notre série également.

D'après la question de cours 2., $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n} \right)^k = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} = \frac{1}{n - x}$.

8. Établir que pour tout $x \in] -1, 1[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1}.$$

Correction :

Soit $x \in] -1, 1[$. D'après la question précédente, appliquée à x et à $-x$:

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{n^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{n^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k - (-x)^k}{n^{k+1}}$$
 par somme de deux séries convergentes.

Le terme $x^k + (-x)^k$ est nul lorsque k est pair, et vaut $2x^k$ lorsque k est impair (on pose $k = 2s - 1$ pour $s \geq 1$) :

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2x^{2s-1}}{n^{2s}} \text{ d'où } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1}.$$

9. Montrer que pour tout x non nul de $] -1, 1[$, on a :

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1}.$$

Le théorème utilisé sera cité avec précision en vérifiant ses hypothèses avec soin.

Correction :

Afin de permuter les deux sommes présentes dans la formule précédente, utilisons le théorème de Fubini pour les séries doubles de réels de signe constant. Fixons x non nul dans $] -1, 1[$, le signe de

x^{2s-1} est constant pour tout $s \geq 1$ et posons pour $n, s \in \mathbb{N}^*$, $u_{n,s} = \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{s \geq 1} u_{n,s}$ converge d'après la question précédente, et sa somme vaut

$$\sum_{s=1}^{+\infty} u_{n,s} = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

- La série $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{s=1}^{+\infty} u_{n,s} \right)$ converge de la même façon qu'à la question 3. (équivalence au terme général d'une série de Riemann convergente).
- Alors $\forall s \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n \geq 1} u_{n,s}$ converge, la série $\sum_{s \geq 1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,s} \right)$ converge, et on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1} \right) &= \sum_{s=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1} \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) &= \sum_{s=1}^{+\infty} \left(2x^{2s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2s}} \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) &= \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) 2x^{2s-1} \end{aligned}$$

On remplace dans l'expression de $E_1(x)$:

$$E_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = \frac{1}{x} - 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1}$$

10. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1, 1[, x \neq 0$,

$$E_k(x) = \frac{1}{x^k} + 2(-1)^k \sum_{s=1}^{+\infty} \binom{2s-1}{k-1} \zeta(2s) x^{2s-k},$$

avec la convention $\binom{m}{p} = 0$ si $p > m$.

Correction :

L'expression $\varphi(x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1}$ est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est au moins 1 d'après les question 8. et 9. : elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ avec, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\varphi^{(k)}(x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \underbrace{(2s-1)(2s-2) \cdots (2s-1-(k-1))}_{k \text{ termes}} \zeta(2s) x^{2s-1-k}$$

$$(2s-1)(2s-2) \cdots (2s-1-(k-1)) = \frac{(2s-1)!}{(2s-1-k)!} = k! \binom{2s-1}{k}$$

Ce même produit s'annulant si $k > 2s-1$, on peut garder l'expression précédente avec la convention de l'énoncé. On remplace alors dans l'expression de la question 6.2. : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout

$x \in]-1, 1[, x \neq 0 :$

$$\begin{aligned}
 E_k(x) &= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}(x) \\
 &= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{1}{x} \right) - 2 \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi^{(k-1)}(x) \\
 &= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} - 2 \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{s=1}^{+\infty} (k-1)! \binom{2s-1}{k-1} \zeta(2s) x^{2s-1-(k-1)} \\
 &= \frac{1}{x^k} + 2(-1)^k \sum_{s=1}^{+\infty} \binom{2s-1}{k-1} \zeta(2s) x^{2s-k}
 \end{aligned}$$

Exercice 3

Dans cet exercice, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. À tout n -uplet $(a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^{n-1}$, c'est-à-dire que $a_1 \neq 0$, on associe la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

1.1. Justifier que M est diagonalisable.

Correction :

M est symétrique réelle, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable (en bonus, dans une base orthonormée).

1.2. Déterminer le rang de la matrice M .

Correction :

Puisque $a_1 \neq 0$, la première et la dernière colonne de M sont non nulles et linéairement indépendantes, donc $\text{rg} M \geq 2$. Toutes les autres colonnes sont proportionnelles à la première, donc $\text{rg} M = 2$.

1.3. Justifier que 0 est valeur propre et donner son ordre de multiplicité.

Correction :

Nous utiliserons dans la suite les notations habituelles : pour toute valeur propre λ , m_λ désigne sa multiplicité et $E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n)$ son sous-espace propre associé.

Puisque $\text{rg}(M) < n$, M n'est pas inversible, donc $\dim(\text{Ker } M) \geq 1$ i.e. 0 est valeur propre.

On a $E_0(M) = \text{Ker}(M)$. D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker } M) + \text{rg}(M) = n$ donc $\dim(\text{Ker } M) = n - 2$.

La multiplicité d'une racine étant supérieure ou égale à la dimension du sous-espace propre associé, 0 est de multiplicité au moins $n - 2$. Il y a égalité pour une matrice diagonalisable, donc $m_0 = n - 2$.

1.4. Démontrer alors que la matrice M possède deux valeurs propres non nulles (éventuellement égales) que l'on notera λ_1 et λ_2 .

Correction :

Puisque M est diagonalisable, son polynôme caractéristique χ_M (de degré n) est scindé et s'écrit $\chi_M = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$. Puisque 0 est valeur propre de multiplicité $n - 2$, on peut factoriser en $\chi_M = X^{n-2}Q$, où Q est un polynôme de degré deux possédant deux racines non nulles, éventuellement confondues, λ_1 et λ_2 .

1.5. Déterminer une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

Correction :

Notons $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M .

Puisque $a_1 \neq 0$, pour i de 2 à $n - 1$, on a $C_i - \frac{a_i}{a_1}C_1 = 0$ (colonne nulle).

Or $C_i = Me_i$, donc $M(e_i - \frac{a_i}{a_1}e_1) = 0$: on a trouvé un vecteur du noyau de M .

Les $n - 2$ vecteurs obtenus $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_i/a_1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } i$ sont linéairement indépendants (échelonnés)

et donc constituent une base du noyau de M .

1.6. Soit λ un réel non nul.

En résolvant le système $MX = \lambda X$ où X est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, montrer que λ_1 et λ_2 sont solutions de l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda a_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0$$

Correction :

Soit λ une valeur propre non nulle, donc l'une des valeurs λ_1, λ_2 dont l'existence a été assurée à

la question 1.4. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $MX = \lambda X$, c'est-à-dire un vecteur propre associé.

$$MX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} x_n = \lambda x_{n-1} \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x_n - \lambda x_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{n-1} x_n - \lambda x_{n-1} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i + (a_n - \lambda) x_n = 0 \end{cases}$$

On effectue l'opération $L_n \leftarrow \lambda L_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{\lambda} L_i$, qui ne change pas le rang du système car $\lambda \neq 0$.

$$MX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a_1}{\lambda} x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{\lambda} x_n \\ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j^2}{\lambda} x_n + (a_n - \lambda) x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x_n \begin{pmatrix} a_1/\lambda \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j^2}{\lambda} x_n + (a_n - \lambda) x_n = 0 \end{cases}$$

Puisque X est un vecteur propre non nul, x_n n'est pas nul et en simplifiant on obtient la condition

nécessaire sur λ_1 et λ_2 : ils vérifient bien l'équation $\sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 + \lambda a_n - \lambda^2 = 0$.

Réciproquement, si λ vérifie $\sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 + \lambda a_n - \lambda^2 = 0$, alors il existe un vecteur non nul X tel que $MX = X$ donc λ est une valeur propre non nulle de M .

1.7. Déterminer une base des sous-espaces propres de M associés à λ_1 et λ_2 .

Correction :

D'après ce que nous venons d'écrire, le discriminant de l'équation précédente étant

$\Delta = a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 > 0$ car nos a_j sont des réels et $a_1 \neq 0$, l'équation possède deux solutions

distinctes, donc il y a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 .

Le sous-espace propre $E_0(M) = \text{Ker}(M)$ étant de dimension $n - 2$, ces deux valeurs propres ne peuvent qu'être simples, et la résolution précédente nous fournit une base de chaque sous-espace

propre : les vecteurs $\begin{pmatrix} a_1/\lambda_1 \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_1/\lambda_2 \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.8. Expliciter une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.

On précisera la matrice diagonale obtenue.

Correction :

Les colonnes de la matrice de passage P sont les vecteurs propres formant les bases de chaque sous-espace propre :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \frac{a_1}{\lambda_1} & \frac{a_1}{\lambda_2} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & \frac{a_{n-1}}{\lambda_1} & \frac{a_{n-1}}{\lambda_2} \\ -\frac{a_2}{a_1} & & -\frac{a_{n-1}}{a_1} & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_1 & \\ & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

avec des 0 partout ailleurs.

2. Étude du cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2.1. Montrer que :

$$M \text{ n'est pas diagonalisable si, et seulement si, } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \\ \text{ou} \\ a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \end{cases}$$

Correction :

La matrice M n'est plus nécessairement diagonalisable, le théorème spectral ne fonctionnant que dans le cas réel. Par contre, certains raisonnements tenus dans le cas réel restent parfaitement valides :

- 0 est valeur propre et son sous-espace propre est de dimension 2. Donc $m_0 \geq 2$.
- $\lambda \neq 0$ est valeur propre si et seulement si $\lambda^2 - \lambda a_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0$.

L'idée est de rechercher l'existence ou non de valeurs propres non nulle, en passant par le poly-

nôme caractéristique, en utilisant les opérations élémentaires vues précédemment. Soit λ un réel non nul, alors :

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{n-1} \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & \lambda - a_n \end{vmatrix}$$

On effectue à nouveau l'opération $L_n \leftarrow \lambda L_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{\lambda} L_i$, qui ne change pas le déterminant car $\lambda \neq 0$.

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - a_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j^2}{\lambda} \end{vmatrix}$$

Il s'agit d'un déterminant triangulaire, d'où :

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^{n-1} \left(\lambda - a_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j^2}{\lambda} \right) = \lambda^{n-2} \left(\lambda^2 - \lambda a_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 \right)$$

Ceci est l'expression de $\chi_M(\lambda)$ pour tout complexe λ non nul. Mais on sait qu'en tant que fonction, le polynôme caractéristique est une fonction polynômiale, donc continue sur $\mathbb{C}$, cette expression est donc encore valable pour $\lambda = 0$. Ainsi :

$$\chi_M = X^{n-2} \left(X^2 - a_n X - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 \right)$$

Examinons le polynôme du second degré $Q = X^2 - a_n X - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2$, qui va nous donner deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de M .

- Son terme constant, nul si et seulement si 0 est racine, est $C = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2$.
- Son discriminant, nul en cas de racine double et non nul si deux racines distinctes, est $\Delta = a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2$.

Les seuls cas possibles pour les dernières valeurs propres, λ_1 et λ_2 , racines de Q sont :

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: $C = 0$ et $\Delta = 0$. Alors 0 est de multiplicité n , strictement supérieure à $\dim(E_0(M))$ et M n'est pas diagonalisable.
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$: $C = 0$ et $\Delta \neq 0$. Alors 0 est de multiplicité $n - 1$, strictement supérieure à $\dim(E_0(M))$ et M n'est pas diagonalisable.
- $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = \lambda_2$: $C \neq 0$ et $\Delta = 0$. M admet une seule valeur propre non nulle, de multiplicité 2, et la résolution vue à la question 1. donne un sous-espace propre de dimension seulement 1, M n'est pas diagonalisable.
- $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$: $C \neq 0$ et $\Delta \neq 0$. Alors 0 est de multiplicité égale à $\dim(E_0(M))$, les deux autres valeurs propres non nulles sont simples, M est diagonalisable.

On a balayé tous les cas possibles, les cas où M n'est pas diagonalisable sont exactement les cas où $C = 0$ ou $\Delta = 0$, comme demandé.

2.2. Donner un exemple de matrice M non diagonalisable dans le cas où $n = 3$.

Correction :

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & i & 2 \end{pmatrix}$ vérifie $C = 0$, $\Delta = 4$, elle n'est donc pas diagonalisable.

FIN