

MATHÉMATIQUES

– une proposition de correction –

EXERCICE 1

Questions préliminaires

1. Puisque μ est une valeur propre de g , il existe un vecteur x non nul de H tel que $g(x) = \mu x$.
Alors $g^2(x) = g(g(x)) = g(\mu x) = \mu g(x) = \mu(\mu x) = \mu^2 x$, et comme $x \neq 0_H$, μ^2 est donc une valeur propre de g^2 .
2. Si x est vecteur propre de g^2 associé à une valeur propre λ non nulle, alors $g^2(x) = \lambda x$, donc :

$$g^2(g(x)) = g^3(x) = g(g^2(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

De plus, puisque $x \neq 0_H$ et $\lambda \neq 0$, $g^2(x) = \lambda x \neq 0_H$, ce qui entraîne que $g(x) \neq 0_H$: d'après l'égalité ci-dessus, $g(x)$ est donc un vecteur propre de g^2 .

3. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de g : montrons que $E_\lambda(g)$ et $E_\mu(g)$ sont en somme directe.
Pour tout $x \in E_\lambda(g) \cap E_\mu(g)$, puisque $x \in E_\lambda(g)$, $g(x) = \lambda x$, et comme $x \in E_\mu(g)$, $g(x) = \mu x$, si bien que $\lambda x = \mu x$, donc $(\lambda - \mu)x = 0_H$, et comme $\lambda - \mu \neq 0$, on en déduit que $x = 0_H$.
Par conséquent, $E_\lambda(g) \cap E_\mu(g) = \{0_H\}$, autrement dit $E_\lambda(g)$ et $E_\mu(g)$ sont en somme directe.
4. Par n -linéarité du déterminant, $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.
D'autre part, $\det(A^\top) = \det(A)$.

5. Premières propriétés de l'endomorphisme f

$$5.1. \quad M + M^\top = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 5.2. On vient de montrer que $M = -M^\top$, si bien que $\det(M) = \det(-M^\top) = (-1)^5 \det(M^\top) = -\det(M)$.
Par conséquent, $\det(f) = \det(M) = 0$: f n'est donc pas un automorphisme de E .

- 5.3. On se convainc rapidement que les 4 premières colonnes de M sont linéairement indépendantes (« forme échelonnée »). Ainsi, $\text{rg}(M) \geq 4$.

De plus, on vient de justifier que M n'est pas inversible, donc $\text{rg}(M) < 5$.

Finalement, $\text{rg}(M) = 4$.

$$5.4. \quad M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} : M^2 \text{ est donc une matrice symétrique réelle, et puisqu'elle représente } f^2 \text{ dans une base orthonormée de } E, \text{ on en déduit que } f^2 \text{ est un endomorphisme autoadjoint, ou symétrique, de } E.$$

- 5.5. Puisque M^2 est une matrice symétrique réelle, par le théorème spectral, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

- 5.6. Comme $M^\top = -M$, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$(f(x)|y) = (MX)^\top Y = X^\top M^\top Y = X^\top (-M)Y = X^\top (-MY) = -(X^\top (MY)) = -(x|f(y))$$

6. Étude des éléments propres de l'endomorphisme f

- 6.1. Puisque f n'est pas bijective, et comme E est de dimension finie, f n'est pas injective, donc $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$, si bien qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ vérifiant $f(x) = 0_E = 0 \cdot x$: 0 est donc une valeur propre de f .

De plus, si on considère une valeur propre λ de f , il existe un vecteur x de E non nul vérifiant $f(x) = \lambda x$.

En appliquant l'égalité précédente au couple (x, x) , il vient alors :

$$(f(x)|x) = \begin{cases} (\lambda x|x) = \lambda(x|x) \\ -(x|f(x)) = -(x|\lambda x) = -\lambda(x|x) \end{cases}$$

Par conséquent, $\lambda(x|x) = 0$, et comme $x \neq 0_E$, $(x|x) \neq 0$ (le produit scalaire est défini-positif), et donc $\lambda = 0$, ce qui justifie que 0 est la seule éventuelle valeur propre de f .

Comme on a d'abord établi que 0 est bel et bien une valeur propre de f , il s'agit donc de sa seule valeur propre.

6.2. Si f était diagonalisable, il existerait une base dans laquelle f serait représentée par une matrice diagonale avec, sur la diagonale, les valeurs propres de f . Comme 0 est la seule valeur propre de f , f serait donc représentée, dans la base évoquée précédemment, par la matrice nulle : f serait donc l'endomorphisme nul, ce qui n'est pas le cas, puisque $M \neq 0_{n,n}$.

6.3. Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 .

Il existe donc $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f^2(x) = \lambda x$.

En appliquant l'égalité établie en **5.6.** au couple $(f(x), x)$, on obtient :

$$(f(f(x))|x) = \begin{cases} (\lambda x|x) = \lambda(x|x) \\ -(f(x)|f(x)) \end{cases}$$

Par conséquent, puisque $(x|x) \neq 0$ (car $x \neq 0_E$), $\lambda = -\frac{(f(x)|f(x))}{(x|x)} < 0$, par positivité du produit scalaire (en n'oubliant pas que $\lambda \neq 0$).

7. Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

Puisque $x \in \text{Im}(f)$, il existe $u \in E$ tel que $x = f(u)$, et donc :

$$(x|x) = \underbrace{(f(u)|x) = -(u|f(x))}_{\text{d'après 5.6.}} = -(u|0_E) = 0$$

Puisque le produit scalaire est défini-positif, on en déduit que $x = 0_E$.

On a donc montré que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$: $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont donc en somme directe.

De plus, par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$.

On en conclut : $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

8. 8.1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha x + \beta f(x) = 0_E$.

En appliquant f à cette égalité, il vient, par linéarité : $\alpha f(x) + \beta f^2(x) = 0_E$.

Cette égalité se réécrit $\alpha f(x) + \beta \lambda x = 0_E$.

En multipliant la première égalité par α et la deuxième par β , et en retranchant l'une à l'autre, on obtient $(\alpha^2 - \beta^2 \lambda) x = 0_E$.

Comme $x \neq 0_E$, on en déduit que $\alpha^2 - \beta^2 \lambda = 0$, et comme $\lambda < 0$, cette égalité impose $\alpha = 0 = \beta$.

Par conséquent, $(x, f(x))$ est libre.

8.2. Puisque $(x, f(x))$ est libre, $(x, f(x))$ engendre un plan vectoriel.

De plus, $f(x) \in \text{Im}(f)$, et, comme $f^2(x) = \lambda x$, et puisque $\lambda \neq 0$, $x = \frac{1}{\lambda} f^2(x) = f\left(f\left(\frac{1}{\lambda} x\right)\right) \in \text{Im}(f)$.

Par conséquent, $\text{Vect}(x, f(x)) \subset \text{Im}(f)$.

Finalement, $(x, f(x))$ engendre un plan vectoriel de $\text{Im}(f)$.

9. Puisque u un vecteur propre de f^2 associé à la valeur propre -1 , d'après le travail effectué en **2.**, $f(u)$ est aussi un vecteur propre de f^2 associé à -1 . De plus, d'après **8.1.**, $(u, f(u))$ est une famille libre.

De même, $(v, f(v))$ est une famille libre de $E_{-3}(f^2)$.

Comme, d'après **3.**, $E_{-1}(f^2)$ et $E_{-3}(f^2)$ sont en somme directe, $(u, f(u), v, f(v))$ est une famille libre.

En reprenant les arguments vus en **8.2.**, $(u, f(u), v, f(v))$ est une famille de vecteurs de $\text{Im}(f)$.

En particulier, on déduit de ce qui précède que $\dim(\text{Im}(f)) \geq 4$.

Or f n'est pas injective, donc $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 1$, si bien que, par la formule du rang, $\dim(\text{Im}(f)) \leq 4$. Par conséquent, $\dim(\text{Im}(f)) = 4$: comme $(u, f(u), v, f(v))$ est une famille libre de $\text{Im}(f)$ constituée de 4 vecteurs, elle forme une base de $\text{Im}(f)$.

10. Commençons par observer que, d'après le travail précédent, $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. Ainsi, si on note x un vecteur non nul de $\text{Ker}(f)$ (un tel vecteur existe), (x) est une base de $\text{Ker}(f)$, et comme $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$, $(x, u, f(u), v, f(v))$ est une base de E .

Comme $f(f(u)) = -u$ et $f(f(v)) = -3v$, f^2 est représenté, dans la base $(x, u, f(u), v, f(v))$, par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par les formules de changement de base, on en déduit que la matrice M est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2

Questions préliminaires

1. $e^t \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2).$

2. Puisque h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, par le théorème fondamental du calcul intégral, $H : x \mapsto \int_a^x h(t) dt$ est une primitive de h : elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $H' = h$.

3. Pour tout $x > 0$, $G(x) = \int_x^1 h(t) dt + \int_1^{x+1} h(t) dt = H(x+1) - H(x)$, en reprenant la fonction H introduite dans la question précédente pour $a = 1$.

Puisque H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, G est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$:

$$G'(x) = H'(x+1) - H'(x) = h(x+1) - h(x)$$

4. Fixons $x > 0$.

Puisque f est continue sur $[0; 1]$, $t \mapsto \frac{f(t)}{x+t}$ est continue sur $[0; 1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{x+t} dt$ est correctement définie.

Par conséquent, la fonction $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)}{x+t} dt$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Un premier exemple

5.1. $F_0(x) = \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = [\ln(x+t)]_0^1 = \ln(x+1) - \ln(x).$

5.2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} F_k(x) + xF_{k-1}(x) &= \int_0^1 \frac{t^k}{x+t} dt + x \int_0^1 \frac{t^{k-1}}{x+t} dt = \int_0^1 \frac{t^k + xt^{k-1}}{x+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{k-1}(t+x)}{x+t} dt \\ &= \int_0^1 t^{k-1} dt = \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^1 = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

5.3. $\frac{F_k(x)}{(-x)^k} - \frac{F_{k-1}(x)}{(-x)^{k-1}} = \underbrace{\frac{F_k(x) + xF_{k-1}(x)}{(-x)^k}}_{\text{d'après 5.2.}} = \frac{1}{(-x)^k k} = \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{1}{x} \right)^k.$

5.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On peut établir l'égalité demandée en procédant par récurrence, ou en sommant les égalités obtenues dans la question précédente pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{F_k(x)}{(-x)^k} - \frac{F_{k-1}(x)}{(-x)^{k-1}} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{1}{x} \right)^k$$

Par télescopage, $\sum_{k=1}^n \left(\frac{F_k(x)}{(-x)^k} - \frac{F_{k-1}(x)}{(-x)^{k-1}} \right) = \frac{F_n(x)}{(-x)^n} - \frac{F_0(x)}{(-x)^0} = \frac{F_n(x)}{(-x)^n} - (\ln(x+1) - \ln(x)).$

Ainsi, si on pose $P_n = -\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k X^k}{k}$ (c'est un polynôme), on déduit de ce qui précède que :

$$F_n(x) = (-x)^n \left(\ln(x+1) - \ln(x) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{1}{x} \right)^k \right) = (-x)^n \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - P_n \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

6. Un deuxième exemple

6.1. Soit $x > 0$.

Effectuons, comme indiqué le changement de variable défini par $u = x + t$: puisque $t \mapsto x + t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, on peut écrire $du = dt$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt = \int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u} du = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du$.

D'après la question **3.**, puisque $u \mapsto \frac{e^u}{u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme $x \mapsto e^{-x}$ est également de classe $\mathcal{C}^1$, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

6.2. A x fixé, on constate que l'intégrale $K(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0; x]$ ou $[x; 0]$: c'est un peu plus délicat pour $J(x)$.

6.2.1. $t \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 ($e^t - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, donc $\frac{e^t - 1}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$), donc, par l'abus d'écriture qui consiste à identifier la fonction précédente avec son prolongement par continuité, qui est continu sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$ est correctement définie pour tout $x \geq 0$ et, par le théorème fondamental du calcul intégral, la fonction J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

De même, la continuité de $t \mapsto \frac{e^t}{1+t}$ sur $\mathbb{R}_+$ implique que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

6.2.2. L est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} L'(x) &= G'(x)e^x + G(x)e^x - eK'(x) + J'(x) + \frac{1}{x} \\ &= \left(-e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du + e^{-x} \left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x} \right) e^x \right) + e^{-x} \left(\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du \right) e^x - e \times \frac{e^x}{1+x} + \frac{e^x - 1}{x} + \frac{1}{x} \\ &= \left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x} \right) - \frac{e^{x+1}}{1+x} + \frac{e^x}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

L est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

6.2.3. Pour tout $x > 0$, $G(x) = e^{-x} (L(x) + eK(x) - J(x) - \ln(x))$.

Puisque L est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est prolongeable par continuité en 0. De plus, J et K sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, donc, en particulier, continues en 0.

$x \mapsto L(x) + eK(x) - J(x)$ a donc une limite finie en 0 : en particulier, $L(x) + eK(x) - J(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\ln(x))$.

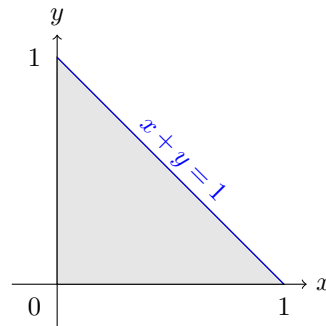
Par conséquent, $G(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} +\infty$ et $G(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e^{-x}(-\ln(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$.

EXERCICE 3

1. Puisque $X(\Omega) \subset \{1, 2, 3\}$, $X^2(\Omega) \subset \{1, 4, 9\}$.
2. Par la formule de transfert, $\mathbb{E}(X^2) = 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 2^2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 3^2 \times \mathbb{P}(X = 3) = p_1 + 4p_2 + 9p_3$.
3. Par la formule de Huygens, $\mathbb{V}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (p_1 + 4p_2 + 9p_3) - (p_1 + 2p_2 + 3p_3)^2$.
 $((X = 1), (X = 2), (X = 3))$ étant un système complet d'événements, $p_3 = 1 - p_1 - p_2$, et donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= (p_1 + 4p_2 + 9(1 - p_1 - p_2)) - (p_1 + 2p_2 + 3(1 - p_1 - p_2))^2 \\ &= (9 - 8p_1 - 5p_2) - (3 - 2p_1 - p_2)^2 \\ &= (9 - 8p_1 - 5p_2) - (9 + 4p_1^2 + p_2^2 - 12p_1 - 6p_2 + 4p_1p_2) \\ &= -4p_1^2 - p_2^2 - 4p_1p_2 + 4p_1 + p_2\end{aligned}$$

4. 4.1. T est une partie de $\mathbb{R}^2$ incluse dans le « carré » $[0; 1]^2$, notamment délimitée par un segment de la droite d'équation $x + y = 1$: il s'agit de la surface située à l'intérieur du triangle ci-contre (les côtés du triangle étant inclus dans T).



- 4.2. Puisque f est polynomiale, elle est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
- 4.3. Comme précisé dans l'énoncé, T est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

Si on est sceptique, on peut remarquer que, pour tout $(x, y) \in T$, $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y| = x + y \leq 1$, donc T est bornée (pour $\|\cdot\|_1$, donc pour toute norme de $\mathbb{R}^2$, puisque toutes les normes d'un espace de dimension finie sont équivalentes). De plus, en notant $f_1 : (x, y) \mapsto x$, $f_2 : (x, y) \mapsto y$ et $f_3 : (x, y) \mapsto x + y$, on remarque que $T = f_1^{-1}([0; +\infty[) \cap f_2^{-1}([0; +\infty[) \cap f_3^{-1}([-\infty; 1])$: comme les intervalles $[0; +\infty[$ et $]-\infty; 1]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$, et puisque f_1 , f_2 et f_3 sont continues, T s'interprète donc comme l'intersection de trois parties fermées de $\mathbb{R}^2$: T est donc bel et bien fermé.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est, en particulier, continue sur T qui est un fermé borné d'un espace ($\mathbb{R}^2$) de dimension finie : par le théorème des bornes atteintes, f est donc bornée et atteint ses bornes, autrement dit f possède des extrema dans T .

- 4.4. $\nabla f(m) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (4 - 8x - 4y, 1 - 2y - 4x)$.

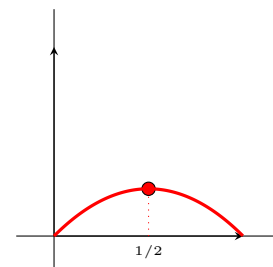
- 4.5. Commençons par chercher les éventuels points critiques de f dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 8x + 4y = 4 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$$

Comme les deux dernières équations sont contradictoires, f ne possède aucun point critique dans $\mathbb{R}^2$: c'est, *a fortiori*, le cas dans l'intérieur de T .

- 4.6. g est dérivable, et, pour tout $x \in [0; 1]$, $g'(x) = 1 - 2x$, donc g est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, ce que l'on peut représenter comme suit :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$\frac{1}{4}$	0



- 4.7. Si on note $T' = \{(x, y) \in [0; 1]^2; x + y < 1\}$, on constate que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (ce que l'on peut justifier en adaptant les arguments utilisés pour montrer que T est un fermé) inclus dans T . Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc en particulier sur T' , si elle possède un extremum local sur l'ouvert T' , celui-ci sera atteint en un point critique de f . Or on a montré que f ne possède aucun point critique : f ne possède donc aucun extremum local sur T' .

Pourtant, f possède des extrema sur T : ceux-ci sont donc atteints en des points de $T \setminus T'$, c'est-à-dire sur l'un des segments : $S_1 = \{(x, 0); 0 \leq x \leq 1\}$, $S_2 = \{(0, y); 0 \leq y \leq 1\}$ et $S_3 = \{(x, 1 - x); 0 \leq x \leq 1\}$.

- *Sur le segment S_1*

Pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x, 0) = 4x - 4x^2 = 4g(x)$.

D'après l'étude réalisée en **4.6.**, sur S_1 , f atteint son minimum (qui est nul) en $(0, 0)$ et en $(1, 0)$, et son maximum (qui vaut $4 \times \frac{1}{4} = 1$) en $(\frac{1}{2}, 0)$.

- *Sur le segment S_2*

Pour tout $y \in [0; 1]$, $f(0, y) = y - y^2 = g(y)$.

Donc, sur S_2 , f atteint son minimum (qui est nul) en $(0, 0)$ et en $(0, 1)$, et son maximum (qui vaut $\frac{1}{4}$) en $(0, \frac{1}{2})$.

- *Sur le segment S_3*

Pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x, 1 - x) = \dots = x - x^2 = g(x)$.

Encore par l'étude réalisée en **4.6.**, sur S_3 , f atteint son minimum (qui est nul) en $(1, 0)$ et en $(0, 1)$, et son maximum (qui vaut $\frac{1}{4}$) en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Finalement, la valeur minimale de f sur T vaut 0, tandis que sa valeur maximale est 1.

5. Au début de l'exercice, on a calculé $\mathbb{V}(X) = f(p_1, p_2)$: d'après le travail qu'on vient de réaliser :

- $\mathbb{V}(X)$ est minimale lorsque $(p_1, p_2) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$, c'est-à-dire (puisque $p_3 = 1 - p_1 - p_2$) lorsque $(p_1, p_2, p_3) \in \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$: dans ce cas, $\mathbb{V}(X) = 0$;
- $\mathbb{V}(X)$ est maximale lorsque $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = 0$... et donc $p_3 = \frac{1}{2}$: dans ce cas, $\mathbb{V}(X) = 1$.

6. On a vu que $\mathbb{V}(X)$ est minimale lorsque $(p_1, p_2, p_3) \in \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$: cela correspond aux cas où X est une variable aléatoire presque sûrement constante.