

Une Correction de mathématiques 1 CNC 2026 Filière PSI

Rédigé par Nassirdine Ahmed

Exercice

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k, \quad \text{avec } q = 1 - p, \quad 0 < p < 1.$$

1.1 La variable $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p .

X représente le nombre d'échecs avant le premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p .

1.2 Comme $q \in]0, 1[$ la série $\sum_{k \geq 0} kpq^k$ est convergente : car $\frac{(k+1)pq^{k+1}}{kpq^k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} q < 1$ donc $\mathbb{E}(X)$ existe.

On calcule :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kpq^k = p \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k \\ &= p \cdot \frac{q}{p^2} \quad \text{car} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}. \\ &= \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{q}{p}}.$$

1.3 Calcul de $\mathbb{P}(X \geq k)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(X \geq k) = \bigcup_{n \geq k} (X = n)$ donc

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{n=k}^{+\infty} pq^n = pq^k \sum_{n=0}^{+\infty} q^{n-k} = pq^k \sum_{m=0}^{+\infty} q^m. \text{ Or } \sum_{m=0}^{+\infty} q^m = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq k) = q^k}.$$

1.4 Étude de la variable aléatoire $X + Y$

1.4.1 Ensemble des valeurs de $X + Y$

Comme X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$, $X + Y \in \mathbb{N}$.

$$\text{Donc, } \boxed{(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}}.$$

1.4.2 Loi de $X + Y$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(X + Y = n) = \bigcup_{k=0}^n (X = k, Y = n - k)$ donc

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = n - k)). \text{ Comme } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes, alors}$$

$$\mathbb{P}((X = k) \cap (Y = n - k)) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k) = p^2 q^n.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n p^2 q^n = (n + 1)p^2 q^n.$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = (n + 1)p^2q^n.$$

1.4.3 Cas $k > n$

Si $k > n$, l'événement $(X = k) \cap (X + Y = n)$ est impossible.

Donc,

$$\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k) = 0.$$

1.4.4 Cas $k \leq n$

Par définition de la probabilité conditionnelle, $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k) = \frac{\mathbb{P}((X = k) \cap (X + Y = n))}{\mathbb{P}(X + Y = n)}$.

Or, $(X = k) \cap (X + Y = n) = (X = k) \cap (Y = n - k)$.

Donc, par indépendance $\mathbb{P}((X = k) \cap (X + Y = n)) = pq^k \cdot pq^{n-k} = p^2q^n$.

Comme $\mathbb{P}(X + Y = n) = (n + 1)p^2q^n$, (Q1.4.4). On obtient

$$\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k) = \frac{1}{n + 1}.$$

1.5 Étude des variables aléatoires $V = Y - X$ et $M = \min(X, Y)$

1.5.1 Ensembles de valeurs $V(\Omega) = \mathbb{Z}$, et $M(\Omega) = \mathbb{N}$.

1.5.2 Calcul de $\mathbb{P}(M \geq k)$

On a $(M \geq k) = (X \geq k) \cap (Y \geq k)$.

Par indépendance, $\mathbb{P}(M \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k) = q^kq^k$.

Donc,

$$\mathbb{P}(M \geq k) = q^{2k}.$$

1.5.3 Loi de M

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(M = k) = (M \geq k) \setminus (M \geq k + 1)$. Ainsi

$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \geq k) - \mathbb{P}(M \geq k + 1) = q^{2k} - q^{2k+2} = q^{2k}(1 - q^2).$$

Donc,

$$\mathbb{P}(M = k) = (1 - q^2)q^{2k}.$$

Ainsi M suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$ sur $\mathbb{N}$.

1.5.4 Calcul de $\mathbb{P}((M = k) \cap (V = r))$

Premier cas : $r \geq 0$ Alors, $Y \geq X$ donc $M = X$ et $V = r \iff Y = X + r$.

Si $M = k$, on a $X = k$ et $Y = k + r$.

Donc,

$$\mathbb{P}(M = k, V = r) = \mathbb{P}(X = k, Y = k + r) = pq^k \cdot pq^{k+r} = p^2q^{2k+r}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(M = k, V = r) = p^2 q^{2k+r} \quad (r \geq 0).$$

Deuxième cas : $r < 0$

On a $r < 0$ donc $M = Y$. Comme $M = k$, on obtient $Y = k$ et $X = k - r$.

Donc,

$$\mathbb{P}(M = k, V = r) = pq^{k-r} \cdot pq^k = p^2 q^{2k-r} = p^2 q^{2k+|r|}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(M = k, V = r) = p^2 q^{2k+|r|}.$$

1.5.5 Loi de V

Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a $(V = r) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} ((Y = k) \cap (V = r))$ car $((Y = K))_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V = r) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(M = k, V = r) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^2 q^{2k+|r|} \\ &= p^2 q^{|r|} \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} \\ &= \frac{p}{1+q} q^{|r|} \quad \text{car} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \frac{1}{1-q^2} \quad \text{et} \quad 1-q^2 = p(1+q) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(V = r) = \frac{p}{1+q} q^{|r|}.$$

1.5.6 Indépendance de M et V

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathbb{P}(M = k, V = r) = p^2 q^{2k+|r|}, \quad \mathbb{P}(M = k) = (1-q^2)q^{2k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(V = r) = \frac{p}{1+q} q^{|r|}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}(M = k)\mathbb{P}(V = r) = (1-q^2)q^{2k} \cdot \frac{p}{1+q} q^{|r|} = p^2 q^{2k+|r|} = \mathbb{P}(M = k, V = r)$$

Par conséquent, M et V sont indépendantes.

Problème

Partie 1

2.1 Formule de Taylor avec reste intégrale

2.1.1 Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

On a $R_{k-1} = \int_a^b \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) dt$.

On effectue une intégration par parties avec $u'(t) = \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}$, $v(t) = f^{(k)}(t)$.

Alors $u(t) = -\frac{(b-t)^k}{k!}$, $v'(t) = f^{(k+1)}(t)$.

Ainsi,

$$R_{k-1} = \left[-\frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt.$$

on obtient

$$R_{k-1} = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k.$$

2.1.2 Formule de Taylor avec reste intégrale, par récurrence

Base de récurrence : pour $n = 0$, (1) s'écrit $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$ ce qui est vrai par le théorème fondamentale de calcul intégrale.

Soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose la formule (1) est vrai pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ alors f est de $\mathcal{C}^{n+1}$ ainsi par hypothèse de récurrence

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n \quad (*)$$

Par la question **2.1.1** on a $R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + R_{n+1}$, donc (*) devient

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$$

cqfd.

Remarque $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $R_{k-1} - R_k = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$, on somme on obtient

$$\sum_{k=1}^n (R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \text{ ainsi } R_0 - R_n = \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a), \text{ comme } R_0 = f(b) - f(a) \text{ on obtient alors } f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n \text{ c'est exactement la formule (1).}$$

2.2 Application au calcul d'une série

2.2.1 Convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$

- Pour $x = 0$, la série devient $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0$ est convergente de somme 1.
- Pour $x \neq 0$ on pose $u_n = \frac{x^n}{n!}$. On applique le critère de d'Alembert : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x|}{n+1}$. Or $\frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est donc convergente pour tout réel x .

2.2.2 Application à la fonction exponentielle

On applique la formule de Taylor à $f(t) = e^t$, entre 0 et x .

Comme $f^{(k)}(t) = e^t$, on a $f^{(k)}(0) = 1$. La formule de Taylor donne alors

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

2.2.3 Soit $x \neq 0$

- Cas $x > 0$.

Pour tout $t \in [0, x]$, on a $0 \leq x - t$ et $e^t \leq e^x$.

Ainsi, $0 \leq \left| \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \right| \leq \frac{(x-t)^n}{n!} e^x$.

Par conséquent,

$$|R_n(x)| \leq \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \right| dt \leq \frac{e^x}{n!} \int_0^x (x-t)^n dt = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$$

- Cas $x < 0$. On écrit $R_n(x) = - \int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$.

Donc $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \int_x^0 |x-t|^n e^t dt$. Pour $t \in [x, 0]$, on a $|x-t| = t-x$.

De plus, $e^t \leq 1 \leq e^{|x|}$.

Ainsi,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \int_x^0 |x-t|^n e^t dt \leq \frac{e^{|x|}}{n!} \int_x^0 (t-x)^n dt = \frac{e^{|x|}}{n!} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

Finalement, pour tout $x \neq 0$,

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

2.2.4 Limite du reste

On vient de montrer que $\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$. Or $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Par encadrement,

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2.2.5 Pour $x \in \mathbb{R}^*$

On a $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$. En faisant tendre n vers $+\infty$, le reste tend vers 0. on

obtient $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Pour $x = 0$ on a $e^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^0 \frac{(0-t)^n}{n!} e^t dt = 1$.

Donc pour tout réel x on a

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

partie 2

3.1 Construction du nombre réel e

On considère

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n n!}.$$

3.1.1 (u_n) et (v_n) sont adjacentes

- Monotonie de (u_n)

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. Donc (u_n) est croissante.

- Monotonie de (v_n)

On a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$. Ainsi (v_n) est décroissante.

- Limite de $v_n - u_n$: $v_n - u_n = \frac{1}{nn!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Conclusion les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers une même limite notée e .

3.1.2 On justifie que $u_n < e < v_n$ Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$, $n < m < p$.

Comme (u_n) est strictement croissante, alors $u_n < u_m$ et $u_m < u_p$.

Ainsi $u_m = \lim_{p \rightarrow +\infty} u_m \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = e$ donc $u_n < u_m \leq e$ d'où $u_n < e$.

Comme (v_n) est strictement décroissante on a $v_p < v_m$ et $v_m < v_n$ puis on fait $p \rightarrow +\infty$ on obtient $e \leq v_m$ et $v_m < v_n$ donc $e < v_n$.

Conclusion $\boxed{u_n < e < v_n}$.

3.1.3 Irrationalité de e

Supposons par l'absurde que $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $u_q = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!}$, on a $q!u_q = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$.

Pour tout $k \leq q$, $\frac{q!}{k!} = q(q-1)\dots(k+1) \in \mathbb{N}$, donc $q!u_q \in \mathbb{N}$.

- $q!e = q!\frac{p}{q} = p(q-1)! \in \mathbb{N}$.
- Aboutir à une contradiction

On a $u_q < e < v_q$ donc $0 < e - u_q < \frac{1}{qq!}$, alors $0 < q!(e - u_q) < \frac{1}{q} < 1$.

or $q!(e - u_q)$ est un entier. On obtient un entier strictement compris entre 0 et 1, contradiction.

Donc

$$\boxed{e \notin \mathbb{Q}}.$$

3.2 Convergence d'une suite d'entiers

Soit $(x_n) \subset \mathbb{Z}$ telle que $\lim x_n = 0$.

Par définition de la limite, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe N tel que

$$n \geq N \implies |x_n| < \frac{1}{2}.$$

Or un entier relatif dont la valeur absolue est strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ est nécessairement nul.

Donc

$$\forall n \geq N, \quad x_n = 0.$$

3.3 Application à l'indépendance linéaire

On suppose $\alpha + \beta e + \gamma e^2 = 0$ (*), avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$.

On veut montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

3.3.1 Réduction au cas entier

on écrit $\alpha = \frac{p_1}{q_1}$, $\beta = \frac{p_2}{q_2}$ et $\gamma = \frac{p_3}{q_3}$ avec $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}$. En multipliant l'égalité (*) par $m = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$:

$$(m\alpha) + (m\beta)e + (m\gamma)e^2 = 0.$$

Comme $m\alpha = p_1 \cdot q_2 q_3 \in \mathbb{Z}$, $m\beta \in \mathbb{Z}$ et $m\gamma \in \mathbb{Z}$, on peut donc supposer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$.

3.3.2 Dérivées de f On a $f(x) = \alpha e^{-x} + \gamma e^x$.

Les fonctions exponentielles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc par les théorèmes généraux f aussi est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Par récurrence : $f^{(n)}(x) = (-1)^n \alpha e^{-x} + \gamma e^x$.

- la propriété est vraie pour $n = 0$: $f^{(0)}(x) = f(x)$ et $(-1)^0 \alpha e^{-x} + \gamma e^x = f^{(0)}(x)$.
- Supposons la propriété est vraie au rang n , alors

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n (-\alpha) e^{-x} + \gamma e^x = (-1)^{n+1} \alpha e^{-x} + \gamma e^x.$$

3.3.3 Formule intégrale

On applique la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et 1 :

$$f(1) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Or $f(1) = \alpha e^{-1} + \gamma e$, et $f^{(k)}(0) = (-1)^k \alpha + \gamma$. de plus $f^{(n+1)}(t) = (-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^t$.

Donc

$$\alpha e^{-1} + \gamma e = \sum_{k=0}^n \frac{\gamma + (-1)^k \alpha}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \left((-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^t \right) dt.$$

3.3.4 Convergence de (y_n)

On a $y_n = \int_0^1 (1-t)^n \left((-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^t \right) dt$.

Sur $[0, 1]$,

$$\left| (-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^t \right| \leq |\alpha| + |\gamma|e.$$

Donc

$$|y_n| \leq \int_0^1 (1-t)^n \left| (-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^t \right| dt \leq (|\alpha| + |\gamma|e) \int_0^1 (1-t)^n dt.$$

Or $\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$. Ainsi $|y_n| \leq \frac{|\alpha| + |\gamma|e}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

3.3.5 Obtention d'une suite d'entiers

- On a $\alpha + \beta e + \gamma e^2 = 0$, on déduit $\alpha e^{-1} + \beta + \gamma e = 0$, alors $\alpha e^{-1} + \gamma e = -\beta$.

En remplaçant dans la formule de la question 3.3.3 : $-\beta = \sum_{k=0}^n \frac{\gamma + (-1)^k \alpha}{k!} + \frac{y_n}{n!}$.

Donc

$$n! \beta + \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} (\gamma + (-1)^k \alpha) = -y_n.$$

Le membre de gauche est un entier. Comme $y_n \rightarrow 0$, le membre de droite tend vers 0.

Par la question 3.2, une suite d'entiers convergeant vers 0 est nulle à partir d'un certain rang.

Il existe donc n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad n! \beta + \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} (\gamma + (-1)^k \alpha) = 0.$$

- Soit $n \geq n_0 + 1$ en écrivant cette relation aux rangs n et $n - 1$,

$$\text{On a } n!\beta + \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}(\gamma + (-1)^k \alpha) = 0 \quad (1) \text{ et } (n-1)!\beta + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!}(\gamma + (-1)^k \alpha) = 0 \quad (2)$$

puis en multipliant (2) par n et en soustrayant, on obtient

$$\forall n \geq n_0 + 1, \quad \gamma + (-1)^n \alpha = 0.$$

3.3.6 Conclusion

Pour n pair : $\gamma + \alpha = 0$, et pour n impair : $\gamma - \alpha = 0$. Donc $\alpha = \gamma = 0$.

L'égalité initiale devient $\beta e = 0$. Comme $e \neq 0$, $\beta = 0$.

Finalement

$$\boxed{\alpha = \beta = \gamma = 0}.$$

Ainsi la famille $(1, e, e^2)$ est libre dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.

Partie 3

4.1 Étude du cas $n = 2$ Soit f une application non constante de $\mathcal{F}_2$. On pose

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|.$$

4.1.1 On Montre que $M_2 > 0$ et $M_0 > 0$

- on suppose $M_2 = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 0$ alors il existent $a, b \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ (on intègre deux fois). Comme f est bornée sur $\mathbb{R}$ alors $a = 0$ donc $f(x) = b$, contradiction puisque f est non constante.

Donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f''(x_0) \neq 0$, d'où $M_2 \geq |f''(x_0)| > 0$.

- Si $M_0 = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = 0$
ce qui implique $f = 0$, contradiction puisque f est non constante.

Ainsi $M_0 > 0$.

4.1.2 Majorations

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$.

- On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 entre x et $x + h$:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \int_x^{x+h} (h - u)f''(u) du. = f(x) + hf'(x) + \int_0^h (h - t)f''(x + t) dt.$$

Donc

$$f(x + h) - f(x) - hf'(x) = \int_0^h (h - t)f''(x + t) dt.$$

Ainsi

$$|f(x + h) - f(x) - hf'(x)| \leq M_2 \int_0^h (h - t) dt. \quad \text{Or} \quad \int_0^h (h - t) dt = \frac{h^2}{2}.$$

Donc

$$\boxed{|f(x + h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{2}}.$$

- De même,

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \int_0^h (h-t)f''(x-t) dt,$$

d'où

$$\boxed{|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{2}}.$$

- D'après les inégalités précédentes on a :

$$-\frac{M_2 h^2}{2} \leq -f(x+h) + f(x) + hf'(x) \leq \frac{M_2 h^2}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{M_2 h^2}{2} \leq f(x-h) - f(x) + hf'(x) \leq \frac{M_2 h^2}{2}$$

En sommant on obtient

$$-M_2 h^2 \leq -f(x+h) + f(x-h) + 2hf'(x) \leq M_2 h^2$$

Ainsi

$$-2M_0 - M_2 h^2 \leq -M_2 h^2 + f(x+h) - f(x-h) \leq 2hf'(x) \leq f(x+h) - f(x-h) + M_2 h^2 \leq 2M_0 + M_2 h^2$$

Donc

$$-(2M_0 + M_2 h^2) \leq 2hf'(x) \leq 2M_0 + M_2 h^2 \quad \text{alors} \quad 2h|f'(x)| \leq 2M_0 + M_2 h^2$$

Alors

$$\boxed{|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2}{2}h}.$$

4.1.3 Majoration de M_1

D'après la question 4.1.2, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, $|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2}{2}h$ le second membre ne dépend pas de x ceci qui montre f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

On considère la fonction $\varphi(t) = \frac{M_0}{t} + \frac{M_2}{2}t$, $t > 0$.

On a $\varphi'(t) = -\frac{M_0}{t^2} + \frac{M_2}{2}$. Le minimum est atteint pour $t_0 = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$.

En ce point, $\varphi(t_0) = \sqrt{2M_0 M_2}$.

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0 M_2}.$$

Donc

$$\boxed{M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}}.$$

4.2 Étude des inclusions $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_k$

Soit $f \in \mathcal{F}_n$, non constante. On pose $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$.

4.2.1 Formule de Taylor

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$ donne

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \underbrace{\int_x^{x+h} \frac{(x+h-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u) du}_{=R_n}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) = f(x+h) - f(x) - R_n,$$

où

$$R_n = \int_x^{x+h} \frac{(x+h-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u) du = \int_0^h \frac{(h-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x+t) dt \quad \text{changement de variable } t = u-x$$

Ainsi

$$|R_n| \leq M_n \int_0^h \frac{(h-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt. \quad \text{Or} \quad \int_0^h \frac{(h-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{h^n}{n!}.$$

Donc

$$|R_n| \leq \frac{M_n h^n}{n!}.$$

Comme

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 2M_0,$$

on obtient

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) \right| \leq 2M_0 + \frac{M_n h^n}{n!}.$$

4.2.2 Bornitude de F_h Pour $h > 0$ fixe et $x \in \mathbb{R}$.

On a $F_h(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x)$. D'après la question 4.2.1, $|F_h(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_n h^n}{n!}$. Comme le second membre de cette inégalité est indépendant de x , alors F_h est bornée sur $\mathbb{R}$ et

$$\|F_h\|_\infty \leq 2M_0 + \frac{M_n h^n}{n!}.$$

4.2.3 Étude matricielle

(i) Déterminant

$$\text{On a } H_{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{h_1}{1!} & \frac{h_1^2}{2!} & \cdots & \frac{h_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ \frac{h_2}{1!} & \frac{h_2^2}{2!} & \cdots & \frac{h_2^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_{n-1}}{1!} & \frac{h_{n-1}^2}{2!} & \cdots & \frac{h_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}. \text{ Chaque colonne } j \text{ contient le facteur } \frac{1}{j!}.$$

Ainsi,

$$\det(H_{n-1}) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j!} \right) \det \begin{pmatrix} h_1 & h_1^2 & \cdots & h_1^{n-1} \\ h_2 & h_2^2 & \cdots & h_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1} & h_{n-1}^2 & \cdots & h_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dans chaque ligne i , on factorise ensuite h_i :

$$= \left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j!} \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} h_i \right) \det \begin{pmatrix} 1 & h_1 & \cdots & h_1^{n-2} \\ 1 & h_2 & \cdots & h_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_{n-1} & \cdots & h_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Or ce dernier déterminant est un déterminant de Vandermonde :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & h_1 & \cdots & h_1^{n-2} \\ 1 & h_2 & \cdots & h_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_{n-1} & \cdots & h_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (h_j - h_i).$$

Ainsi,

$$\det(H_{n-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} h_i}{\prod_{j=1}^{n-1} j!} \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (h_j - h_i).$$

Par conséquent, si les h_i sont deux à deux distincts et non nuls, alors

$$\det(H_{n-1}) \neq 0,$$

donc la matrice H_{n-1} est inversible.

(ii) Système linéaire

Par définition, $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $F_{h_i}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_i^k}{k!} f^{(k)}(x)$.

Donc le vecteur $X = \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$ est solution du système $H_{n-1}X = B_{n-1}$.

(iii) Combinaisons linéaires

Comme H_{n-1} est inversible, $X = H_{n-1}^{-1}B_{n-1}$. Donc chaque dérivée $f^{(k)}$ est donc combinaison linéaire des fonctions $F_{h_1}, \dots, F_{h_{n-1}}$.

4.2.4 Inclusion $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_k$

Soit $f \in \mathcal{F}_n$ donc f est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ donc f est de classe $\mathcal{C}^k$. De plus les fonctions F_{h_i} sont bornées. Toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée.

Donc chaque $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f \in \mathcal{F}_k$.

Par conséquent,

$$\boxed{\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_k}.$$

4.2.5 • Si il existe $k_0 \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $M_{k_0} = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(k_0)}(x) = 0$ donc f est polynomiale bornée donc f est constnte absurde. Ainsi $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $M_k > 0$.

• Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on applique le résultat de la question 4.1.3 à la fonction $g = f^{(k-1)}$. On a g est de classe $\mathcal{C}^2$ car $k+1 \leq n$ et $g' = f^{(k)}$, $g'' = f^{(k+1)}$ sont bornées.

On obtient g' est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g'(x)| \leq \sqrt{2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |g''(x)|}$

Or $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g'(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| = M_k$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g''(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k+1)}(x)| = M_{k+1}$

Donc

$$\boxed{M_k \leq \sqrt{2M_{k-1}M_{k+1}}}.$$

4.2.6 Majoration de M_k

(i) Monotonie On a $a_k = 2^{k-1} \frac{M_k}{M_{k-1}}$ et $a_{k+1} = 2^k \frac{M_{k+1}}{M_k}$ donc

$$\begin{aligned} a_k \leq a_{k+1} &\iff M_k^2 \leq 2M_{k-1}M_{k+1} \\ &\iff M_k \leq \sqrt{2M_{k-1}M_{k+1}} \quad \text{ce qui est vrai d'après la question 4.2.5} \end{aligned}$$

(ii) Produit

$$(a_1 \cdots a_k)^n = (a_1 \cdots a_k)^k (a_{k+1} \cdots a_n)^{n-k} \leq (a_1 \cdots a_n)^k = (a_1 \cdots a_k)^k (a_{k+1} \cdots a_n)^k \iff (a_1 \cdots a_k)^{n-k} \leq$$

Or, comme la suite est (a_i) croissante, $a_1 \cdots a_k \leq a_{k+1}^k$. En élevant à la puissance $n - k$ on a

$$(a_1 \cdots a_k)^{n-k} \leq a_{k+1}^{k(n-k)}.$$

D'autre part, puisque $a_{k+1} \leq a_{k+2} \leq \cdots \leq a_n$, on a $a_{k+1}^{n-k} \leq a_{k+1} \cdots a_n$. En élevant à la puissance k

$$a_{k+1}^{k(n-k)} \leq (a_{k+1} \cdots a_n)^k.$$

Par transitivité : $(a_1 \cdots a_k)^{n-k} \leq (a_{k+1} \cdots a_n)^k$.

Donc

$$(a_1 \cdots a_k)^n \leq (a_1 \cdots a_n)^k.$$

(iii) Majoration de M_k

On a

$$a_1 \cdots a_k = 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{M_k}{M_0}, \quad \text{et} \quad a_1 \cdots a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{M_n}{M_0}.$$

Donc

$$\left(2^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{M_k}{M_0} \right)^n \leq \left(2^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{M_n}{M_0} \right)^k.$$

Après simplification :

$$M_k^n \leq 2^{\frac{kn(n-1) - nk(k-1)}{2}} M_0^{n-k} M_n^k.$$

Ainsi

$$\boxed{M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}}.$$

Merci d'envoyer vos remarques à : ahmed.nassirdine@gmail.com

Fin de corrigé