

Concours National Commun – Session 2026 – Filière TSI

- On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.
- Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties de l'épreuve sont relativement indépendantes entre elles.

Le sujet est composé de deux parties indépendantes. La partie 1 est notée sur 4 points, la partie 2 sur 16 points.

Partie 1 : Doubleur de fréquence

Le montage doubleur de fréquence de la figure 1-1 est composé de deux blocs en cascade. Le premier bloc est un multiplieur composé de deux entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$ et qui restitue en sortie la tension : $u(t) = k_m e_1(t) e_2(t)$, k_m étant une constante. Le deuxième bloc est un filtre adapté au signal à extraire. On envoie aux deux entrées du multiplieur une même tension $e(t) = E_m \cos(2\pi f t)$, d'amplitude E_m et de fréquence f .

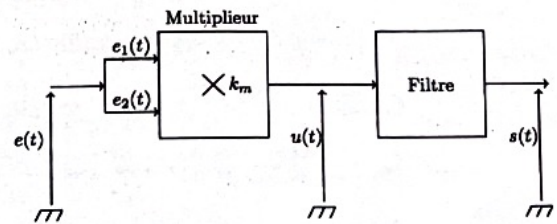


Figure 1-1 : Schéma du doubleur de fréquence.

1. Quelle est l'unité de k_m ?
2. Déterminer l'expression linéarisée du signal $u(t)$. Représenter le spectre en amplitude de $u(t)$ en indiquant l'amplitude de chaque composante spectrale. On donne $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$.

Les figures 1-2 et 1-3 donnent le diagramme de BODE du filtre utilisé. La fonction de transfert du filtre est $\underline{H}(jf) = \frac{H_0}{1 + \left(\frac{f_0}{jf}\right)^n}$, où H_0 et f_0 sont deux constantes positives, et n est un entier positif.

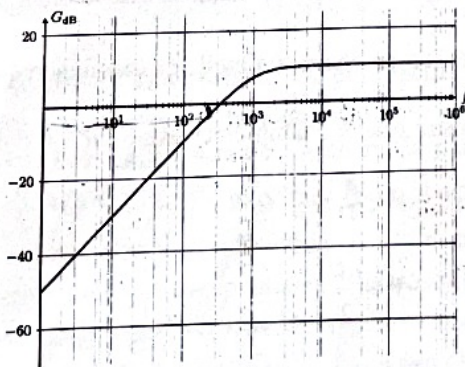


Figure 1-2 : Diagrammes de BODE en amplitude.

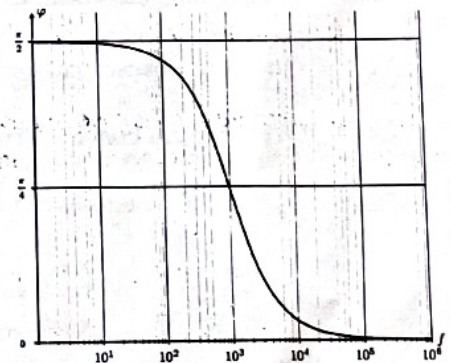


Figure 1-3 : Diagrammes de BODE en phase.

3. Dire, en justifiant la réponse, quelle est la nature du filtre utilisé.
4. En exploitant le diagramme de BODE fourni, déterminer la fréquence de coupure f_c à -3dB , le gain statique H_0 et l'ordre n du filtre utilisé.
5. Quelle condition doit satisfaire la fréquence de coupure f_c pour que le filtre utilisé permette d'obtenir un signal de sortie $s(t)$ sinusoïdal, de fréquence double de la fréquence du signal d'entrée ?
6. En supposant que f_c vérifie cette condition, montrer que la tension $s(t)$ en sortie du filtre utilisé peut se mettre sous la forme : $s(t) = S_m \cos(4\pi f t + \varphi)$. Exprimer S_m et φ .

7. Proposer un montage de filtre qui permet de réaliser la fonction du filtre étudié ci-dessus. Proposer une méthode simple pour mesurer expérimentalement la fréquence de coupure à $-3dB$ du filtre.

Partie 2 : L'électroérosion par fil

L'électroérosion, née en 1970, est une technique d'usinage qui consiste à enlever de la matière à une pièce conductrice, à l'éroder pour lui donner les formes et les dimensions voulues à l'aide de décharges électriques entre deux électrodes. Un fil métallique (1^{ère} électrode) déroulant et en tension est immergé dans un fluide diélectrique avec la pièce à usiner (2^{ème} électrode). Le courant envoyé forme un arc électrique qui engendre une dégradation précise et programmée d'une partie de la pièce. Les résidus créés par usure de la pièce, sont évacués par le fluide. Cette technique permet d'usiner tous les matériaux conducteurs de l'électricité (tels que les métaux, alliages, carbures, graphites, etc.) quelle que soit leur dureté.

Données :

- Théorème de GAUSS sous sa forme intégrale : $\oiint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$;
- Gradient d'un champ scalaire f en coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$: $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$.

On repère un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) auxquelles on associe la base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1. Champ électrostatique créé par un fil infini

On considère un fil cylindrique d'axe Oz , de diamètre d et de longueur supposée infinie. Le fil, placé dans l'espace assimilé au vide de permittivité diélectrique ϵ_0 , est chargé uniformément avec la densité surfacique σ . On souhaite appliquer le théorème de GAUSS pour calculer le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ électrostatiques au point M de l'espace.

- 1.1. Donner la signification de q_{int} dans l'expression du théorème de GAUSS. Préciser les unités du champ E et ϵ_0 .
- 1.2. Étudier soigneusement les symétries de la distribution de charges et déduire que le champ $\vec{E}(M)$ au point M est radial.
- 1.3. Étudier soigneusement les invariances de la distribution de charges. Quelle conséquence en découle-t-il ?
- 1.4. En choisissant convenablement la surface (S) , montrer que le champ électrostatique est donné par :

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = C_1 \vec{e}_r & \text{si } r < \frac{d}{2} \\ \vec{E}(M) = \frac{C_2}{r} \vec{e}_r & \text{si } r > \frac{d}{2} \end{cases}$$

Exprimer les constantes C_1 et C_2 en fonction des données.

- 1.5. Tracer l'allure de $E(r) = \vec{E}(M) \cdot \vec{e}_r$ en fonction de r .
- 1.6. Commenter la continuité du champ $\vec{E}(M)$.
- 1.7. Quelle relation y a-t-il entre le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$?
- 1.8. Exprimer $V(M)$ pour $r > \frac{d}{2}$. Proposer une référence de potentiel.
- 1.9. Représenter quelques lignes du champ et des surfaces équipotentielles dans un plan perpendiculaire au fil.

2. Électroérosion par fil

Le schéma de la figure 2-1 donne le principe du dispositif de l'électroérosion par fil. L'usinage par électroérosion par fil fonctionne en créant une décharge électrique entre le fil et la pièce à usiner. La pièce reste immobile, le fil en mouvement guide la coupe, produisant des étincelles électriques à proximité de la pièce mise à la terre. Une tension électrique entre le fil et la pièce génère une étincelle électrique au contact, faisant fondre de petits morceaux de métal au cours du processus. Cette décharge enlève de la matière de la pièce à mesure que l'étincelle traverse la pièce.

Le fil, chargé uniformément avec la densité surfacique σ , est un cylindre de diamètre d et sa longueur est suffisante pour négliger les effets de bords. Il crée dans la pièce à usiner une entaille de largeur D . Au fond de l'entaille, le champ électrostatique entre le fil et la pièce est approximativement radial et ne dépend que de la distance r au centre du fil. On fera l'hypothèse que le champ créé par le fil vérifie ces propriétés sur tout le demi-cylindre correspondant au fond de l'entaille, dans lequel sont représentées des lignes de champ sur la figure 2-2. L'espace entre le fil et la pièce est occupé par un fluide isolant que l'on assimilera au vide du point de vue électrostatique en remplaçant la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 par celle de l'isolant, notée $\epsilon_0 \epsilon_r$, où ϵ_r est la permittivité relative du fluide.

On souhaite appliquer le théorème de GAUSS pour calculer le champ électrostatique dans le fond de l'entaille.

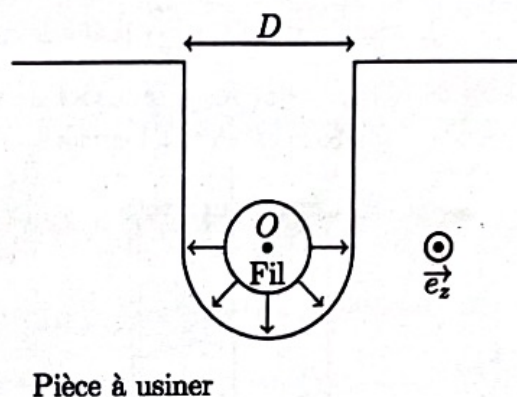
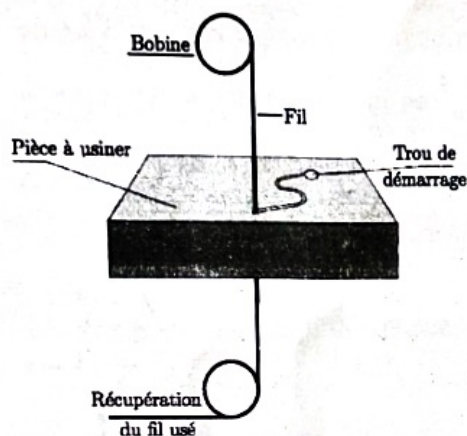


Figure 2-1 : Principe du dispositif de l'électroérosion par fil. Figure 2-2 : Vue de dessus de l'entaille dans la pièce usinée.

- 2.1. En tenant compte de l'allure des lignes du champ, choisir la surface fermée délimitant une portion du fil de hauteur h et montrer que le champ électrostatique dans le fond de l'entaille est de la forme :

$$\vec{E}(M) = \frac{C_3}{r} \vec{e}_r$$

Exprimer la constante C_3 en fonction de Q_{int} , h , ϵ_0 et ϵ_r . On notera Q_{int} la charge contenue à l'intérieur de la surface fermée choisie.

- 2.2. On impose le potentiel U au fil, la pièce à usiner étant mise à la terre. En utilisant la relation entre $\vec{E}(M)$ et $V(M)$, exprimer U en fonction de D , d et C_3 . En déduire une deuxième expression de la constante C_3 en fonction de D , d et U .

- 2.3. En quels points le champ électrostatique est-il le plus faible ? Sachant que les arcs électriques apparaissent lorsque le champ électrique est supérieur au champ de rupture $E_{\text{rup}} = 10^7 \text{ SI}$ tout au long d'un arc, déterminer la tension minimale U_m à appliquer au fil pour pouvoir faire une entaille de diamètre $D = 10 \mu\text{m}$ avec un fil de diamètre $d = 5 \mu\text{m}$.

- 2.4. Dans l'électroérosion par fil, le fil provenant d'une bobine constitue l'électrode. Il est déroulé entre deux poulies et doit être sans cesse renouvelé. Expliquer en une phrase pourquoi il faut dérouler la bobine au fur et à mesure de l'usinage de la pièce ?

3. Moteur débobinage/bobinage

Le moteur choisi pour débobiner le fil utilisé dans le procédé d'électroérosion en amont de la zone de taillage ou pour bobiner le fil usé en aval de cette zone est un moteur à courant continu constitué du stator

(pièce ferromagnétique fixe), du rotor (pièce ferromagnétique en rotation) et de l'organe de liaison électrique entre le rotor et l'extérieur du moteur (figures 2-3 et 2-4).

Les enroulements du stator (inducteur), de résistance R_s et d'inductance propre L_s , sont parcourus par un courant constant d'intensité I_s et soumis à une tension U_s en convention générateur, et créent un champ magnétique $\vec{B}_s$.

On modélise le rotor (induit) par une bobine, constituée d'une spire rectangulaire $A_1A_2A_3A_4$ de largeur a et de longueur b suivant l'axe vertical $O'z$ passant par leur centre O' . Dans la zone où évolue le cadre, le champ magnétique créé par les enroulements du stator est radial, $\vec{B}_s = B_0 \vec{e}_r$, stationnaire, orthogonal à l'axe $O'z$ et a une norme B_0 uniforme. Lorsqu'il est parcouru par le courant $i(t)$, le rotor se met en rotation autour de l'axe $O'z$ sous l'effet d'efforts d'origine électromagnétique de moment $\vec{\Gamma}_L$. La position de la bobine est repérée par l'angle $\theta = (O'x, O'X)$, (figure 2-4). Le collecteur, associé au balai, permet de relier le circuit électrique de la partie tournante à une source de tension $u(t)$ par des contacts H et K qui commutent à chaque demi-tour. L'extrémité K de la bobine est reliée au pôle négatif si $\sin \theta < 0$ et au pôle positif si $\sin \theta > 0$.

On désigne par $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire de rotation du rotor de moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation $O'z$, R_m la résistance du rotor et L_m son inductance propre. On pose $\Phi_0 = B_0 ab$. On suppose que le moteur est arrêté à l'instant $t = 0$.

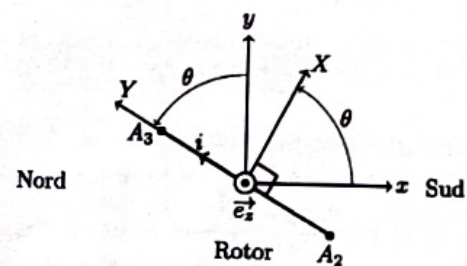
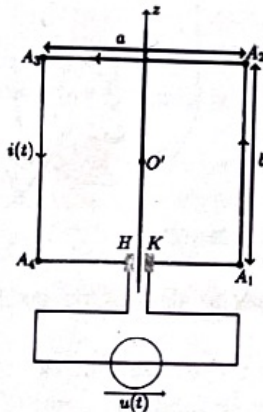


Figure 2-3 : Moteur à courant continu (vue de profil).

Figure 2-4 : Rotor et stator (vue de dessus).

La figure 2-5 donne le schéma électrique équivalent de l'inducteur. On suppose que le couplage électromécanique est parfait. L'étude est faite dans le référentiel (R) du laboratoire supposé galiléen.

- 3.1. À quel type de convertisseur appartient le moteur à courant continu ?
- 3.2. Écrire la relation entre U_s et I_s pour l'enroulement statorique.
- 3.3. Expliquer, par analogie avec le moteur synchrone, que le champ magnétique doit être stationnaire pour créer un couple. Comment le collecteur établit le synchronisme entre le champ statorique stationnaire et le champ rotorique quelle que soit la position angulaire du rotor ? Représenter qualitativement sur le schéma avec plusieurs conducteurs, le champ magnétique rotorique dans l'entrefer. Que vaut l'angle entre les directions moyennes des champs statorique et rotorique dans l'entrefer ?

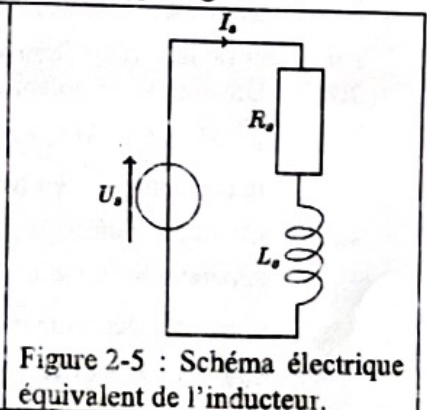


Figure 2-5 : Schéma électrique équivalent de l'inducteur.

- 3.4. Justifier que le moment des forces de LAPLACE sur les côtés A_2A_3 et A_4A_1 par rapport à $O'z$ est nul.
- 3.5. Calculer la force de LAPLACE $\vec{F}_{A_1A_2}$ qui s'exerce sur le côté A_1A_2 . Calculer de même la force de LAPLACE $\vec{F}_{A_3A_4}$ qui s'exerce sur le côté A_3A_4 . Commenter.
- 3.6. En déduire que le moment résultant $\vec{\Gamma}_L$ des forces de LAPLACE qui s'exercent sur la bobine est donné par $\vec{\Gamma}_L = \Phi_0 i(t)$.

- 3.7. Appliquer le théorème du moment cinétique à la bobine dans le référentiel du laboratoire par projection sur l'axe $O'z$, et déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ .
- 3.8. Exprimer la puissance P_L des forces de LAPLACE. En déduire l'expression de la f.é.m. de LORENTZ $e_L(t)$ induite dans la bobine.

Du point de vue électrocinétique, la rotation du rotor équivaut à un générateur idéal de tension $e(t) = -e_L(t)$, opposé au courant. Le schéma de la figure 2-6 donne la modélisation du moteur à courant continu.

- 3.9. Établir l'équation électrique vérifiée par le courant $i(t)$ induit dans la bobine.
- 3.10. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\omega(t)$.

- 3.11. Sachant que le terme $\frac{L_m}{R_m} \frac{d^2\omega}{dt^2}$ est toujours très faible devant $\frac{d\omega}{dt}$, simplifier l'équation différentielle obtenue.

On étudie dans la suite une commande à tension d'induit constante $u(t) = E$.

- 3.12. Exprimer $\omega(t)$. Comment varie le courant $i(t)$ en fonction de $\omega(t)$ pendant le régime transitoire ? On posera $\omega_i = \frac{E}{\Phi_0}$ et $\tau = \frac{R_m J}{\Phi_0^2}$.

- 3.13. Que représentent τ et ω_i ?

Un système mécanique (S) exerce sur l'axe de rotation un couple résistant noté $\bar{\Gamma}_r = -\Gamma_r \bar{e}_z$ avec Γ_r une constante positive.

- 3.14. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $\omega(t)$ en présence du couple résistant s'écrit :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_i}{\omega_i}$$

Exprimer les constantes τ et ω_i en fonction des données. Comparer τ à τ , et ω_i à ω_i . Commenter.

- 3.15. Comment varie le courant $i(t)$ pendant le régime transitoire dans ce cas ?

4. Moteur à courant continu en régime permanent

On suppose dorénavant que le régime permanent stabilisé est établi, $u(t) = E$, $e(t) = E'$, $i(t) = I$ et $\omega(t) = \omega = \omega_i$ sont constants.

- 4.1. Dessiner le schéma électrique du moteur à courant continu (inducteur + induit) en régime permanent.
- 4.2. Écrire les équations électriques vérifiées par le courant et la tension électriques dans l'inducteur et dans l'induit en régime permanent stabilisé.
- 4.3. Commenter la variation de ω en fonction de Γ_r . Que vaut la valeur maximale $\omega_{\max}$ de ω ?
- 4.4. Que se passe-t-il si $\Gamma_r > \frac{\phi_0 E}{R_m}$?
- 4.5. Montrer que la puissance mécanique $P_{\text{mec}}(\omega)$ fournie par le moteur en fonction de ω est donnée par :

$$P_{\text{mec}}(\omega) = P_0 \frac{\omega}{\omega_{\max}} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{\max}} \right)$$

Donner l'expression de P_0 .

- 4.6. Que vaut la puissance mécanique maximale ? Représenter l'allure de $P_{\text{mec}}(\omega)$ en fonction de ω .

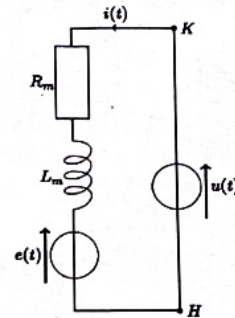


Figure 2-6 : Modèle électrique de l'induit du moteur à courant continu.