

Correction- E3A PC 2025

Partie I – Pression de radiation d'une onde électromagnétique

Q1. La structure de l'onde plane progressive monochromatique dans le vide donne la relation :

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

Q2. L'expression de l'onde électromagnétique dans le vide est la somme des ondes incidentes et réfléchies (principe de superposition) :

$$\vec{E}_{vide} = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y - E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_{vide} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$$

et

$$\vec{B}_{vide} = \vec{B}_i(x, t) + \vec{B}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z + B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_{vide} = 2B_0 \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$$

Q3. Equation de Maxwell Ampère locale :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Equation de Maxwell Ampère dans le conducteur :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

En exprimant le rotationnel en coordonnées cartésiennes on a :

$$-\frac{\partial B_t(x, t)}{\partial x} \vec{e}_y = \mu_0 \vec{j}$$

Une tranche de conducteur de surface $dx dz \vec{e}_y$ est traversée par le courant infinitésimal :

$$di = \vec{j} \cdot dx dz \vec{e}_y = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_t}{\partial x} dx dz$$

Q4. La force de Laplace :

$$d\vec{F}_L = di dy \vec{e}_y \wedge \vec{B}_t(x, t) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_t}{\partial x} dx dz dy B_t(x, t) \vec{e}_x$$

Q5. La force totale $d\vec{F}_{pavé} = \int_{x=0}^{\infty} d\vec{F}_L = \int_{x=0}^{\infty} -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_t}{\partial x} dx dz dy B_t(x, t) \vec{e}_x = -\frac{1}{\mu_0} dz dy \left(\int_{x=0}^{\infty} \frac{\partial B_t}{\partial x} B_t(x, t) dx \right) \vec{e}_x = -\frac{1}{\mu_0} dz dy \left[\frac{B_t(x, t)^2}{2} \right]_{x=0}^{\infty} \vec{e}_x$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} B_t(x, t) = 0$, on a :

$$d\vec{F}_{pavé} = \frac{B_t(0, t)^2}{2\mu_0} dz dy \vec{e}_x = 2 \frac{B_0^2}{\mu_0} \cos^2(\omega t) dz dy \vec{e}_x$$

On a donc la moyenne temporelle :

$$\langle d\vec{F}_{pavé} \rangle = \frac{B_0^2}{\mu_0} dz dy \vec{e}_x$$

Q6. On identifie la pression de radiation dans l'expression précédente :

$$p_{rad} = \frac{B_0^2}{\mu_0}$$

Q7. La densité d'énergie électromagnétique de l'onde dans le vide est :

$$u = \frac{\varepsilon_0 E_{vide}^2}{2} + \frac{B_{vide}^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 4E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kx)}{2} + \frac{4B_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kx)}{2\mu_0}$$

La moyenne temporelle de la densité d'énergie électromagnétique de l'onde dans le vide :

$$\langle u \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx) + \frac{B_0^2}{\mu_0} \cos^2(kx)$$

Avec la relation entre les amplitudes des champs (Q1) :

$$\langle u \rangle = \varepsilon_0 c^2 B_0^2 \sin^2(kx) + \frac{B_0^2}{\mu_0} \cos^2(kx) = \frac{B_0^2}{\mu_0} \sin^2(kx) + \frac{B_0^2}{\mu_0} \cos^2(kx) = \frac{B_0^2}{\mu_0}$$

On retrouve l'égalité entre la pression de radiation et la moyenne temporelle de la densité d'énergie électromagnétique de l'onde dans le vide proposée par Maxwell en 1874.

Partie II - Aspect corpusculaire

Q8. La quantité de mouvement d'un photon :

$$\vec{p} = \frac{h}{2\pi} \vec{k}$$

La quantité de mouvement d'un photon frappant la surface parfaitement réfléchissante en incidence normale devient $\vec{p}' = \frac{h}{2\pi} \vec{k}'$ avec $\vec{k}' = -\vec{k}$.

La variation de quantité de mouvement pour un photon est :

$$\Delta \vec{p}_{1\gamma} = -2 \frac{h}{2\pi} \vec{k}$$

Q9. Le nombre de photons frappant la surface S pendant Δt est l'ensemble des photons contenus dans le volume $Sc\Delta t$. Avec la densité volumique n de photon incident on trouve :

$$N_{\gamma,incident} = nSc\Delta t$$

On applique le principe fondamental de la dynamique sur les photons arrivant sur la paroi pendant le temps Δt . Le système subit la force de la paroi : $\overrightarrow{F_{paroi/photons}}$.

Donc $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \overrightarrow{F_{paroi/photons}}$ avec $\Delta \vec{p} = N_{\gamma,incident} \Delta \vec{p}_{1\gamma} = -nSc\Delta t \frac{h}{\pi} \vec{k}$. Donc :

$$\overrightarrow{F_{paroi/photons}} = -nSc \frac{h}{\pi} \vec{k}$$

Par la troisième loi de Newton, on trouve la force totale exercée par l'ensemble des photons incidents sur une section S de la surface réfléchissante pendant le temps Δt :

$$\overrightarrow{F_{photons/paroi}} = nSc \frac{h}{\pi} \vec{k}$$

C'est une force proportionnelle à la surface, on peut donc exprimer la pression exercée par l'ensemble des photons incidents (pression de radiation) :

$$p = \frac{|\vec{F}_{\text{photons/paroi}}|}{S} = nc \frac{h}{\pi} \|\vec{k}\| = \frac{2nch}{\lambda} = 2nh\nu$$

Q10. L'onde incidente a une densité volumique de n photons incidents par unité de volume. Soit une densité d'énergie incidente $nh\nu$. En ajoutant la densité d'énergie des photons réfléchis on trouve la densité d'énergie des photons présents dans le vide :

$$\varepsilon = 2nh\nu$$

On retrouve bien le lien entre la pression de radiation et la densité d'énergie.

Q11. Pour un faisceau arrivant avec une incidence θ , la variation de quantité de mouvement d'un photon va aussi être modifiée. Il faut introduire l'axe horizontal $\vec{e}_x$. $\Delta\vec{p}_{1\gamma}$ devient :

$$\Delta\vec{p}_{1\gamma} = -2 \frac{h}{2\pi} (\vec{k} \cdot \vec{e}_x) \vec{e}_x = -\frac{h}{\pi} \|\vec{k}\| \cos(\theta) \vec{e}_x$$

Le volume élémentaire pour lequel les photons contenus à l'intérieur vont frapper la surface est aussi modifié. Le nouveau volume est :

$$Sc\Delta t \cos(\theta)$$

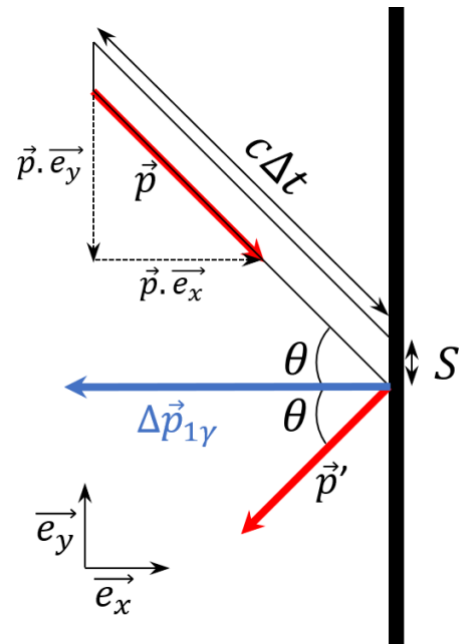
La force totale exercée par les photons devient :

$$\vec{F}_{\text{photons/paroi}} = nSc \cos(\theta) \frac{h}{\pi} \|\vec{k}\| \cos(\theta) \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_{\text{photons/paroi}} = 2nh\nu S \cos^2(\theta) \vec{e}_x$$

La pression de radiation vaut :

$$p = 2nh\nu \cos^2(\theta)$$



Q12.

Travailler avec un laser nécessite de respecter des consignes de prévention dont les principales sont :

- Éviter de placer les faisceaux à hauteur des yeux (les élèves manipulent debout).
- Éviter la présence de surfaces réfléchissantes (paillasse en verre, miroirs, montres, pièces métalliques, lisses/brillantes) dans le trajet du faisceau. Bloquer les réflexions éventuelles en direction des voisins ou confiner le trajet du faisceau.
- Ne pas placer d'éléments optiques focalisant le faisceau en des endroits où il est possible de mettre l'œil.

La densité volumique d'énergie des photons du laser est donnée par $nh\nu$. La puissance d'un faisceau laser de section S_{laser} est donnée par l'énergie du volume du faisceau par unité de temps :

$$P_{\text{laser}} = nh\nu S_{\text{laser}} c$$

Ou avec Poynting

La pression de radiation devient :

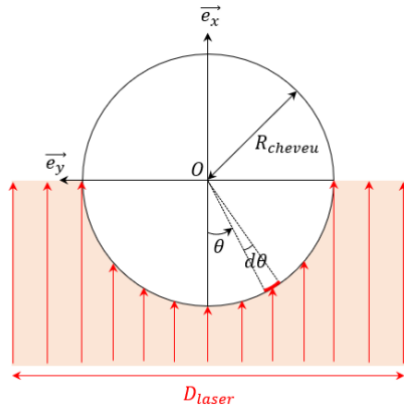
$$p = 2 \frac{P_{\text{laser}}}{S_{\text{laser}} c} \cos^2(\theta)$$

Q13.

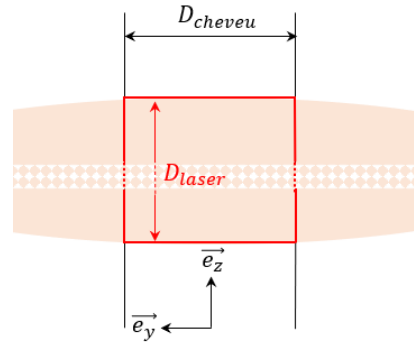
Résolution de problème : Il est possible de faire plus simple et on trouvera le même ordre de grandeur.

La force exercée par le faisceau laser sur un cheveu de diamètre $70\text{ }\mu\text{m}$ se détermine en considérant que le diamètre du faisceau est très supérieur à celui du cheveu. En effet le diamètre du faisceau est $\frac{2\text{ mm}}{70\text{ }\mu\text{m}} = 28$ fois plus large que le diamètre du cheveu. On peut donc faire les schémas suivants :

Vue de coupe du cheveu



Vue de face au cheveu



La projection sur l'axe $\vec{e}_x$ de la force exercée par la pression de radiation sur le cheveu est

$$\vec{F}_{cheveu} \cdot \vec{e}_x = \iint_{Surface} 2 \frac{P_{laser}}{S_{laser} c} \cos^2(\theta) dS$$

avec $dS = dz R_{cheveu} d\theta$

$$\vec{F}_{cheveu} \cdot \vec{e}_x = \iint_{Surface} 2 \frac{P_{laser}}{S_{laser} c} \cos^2(\theta) dz R_{cheveu} d\theta$$

$$\vec{F}_{cheveu} \cdot \vec{e}_x = 2 \frac{P_{laser}}{S_{laser} c} D_{laser} R_{cheveu} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) d\theta$$

$$\vec{F}_{cheveu} \cdot \vec{e}_x = \frac{P_{laser}}{S_{laser} c} D_{laser} R_{cheveu} = \frac{2}{\pi} \frac{P_{laser}}{c} \frac{D_{cheveu}}{D_{laser}}$$

Application numérique : $\vec{F}_{cheveu} \cdot \vec{e}_x = 6,7 \cdot 10^{-14} \text{ N}$

Cette force est très faible en comparaison au force mécanique usuelle, il est donc difficile de mettre en évidence l'existence de la pression de radiation avec un tel laser.

On peut faire le calcul plus rapidement en considérant la surface du cheveu comme un rectangle de surface $D_{laser} D_{cheveu}$. Alors $\vec{F}_{cheveu} \cdot \vec{e}_x = p D_{laser} D_{cheveu} = 2 \frac{P_{laser}}{S_{laser} c} D_{laser} D_{cheveu} = 3 \cdot 10^{-13} \text{ N}$. On retrouve le même ordre de grandeur.

Partie III : Réflexion sur une corde

Q14. On note $\vec{F}$ la force exercée par la corde sur l'anneau, cette force a pour coordonnées :

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_x = T(1 - \cos(\beta))$$

et

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_y = T \sin(\beta)$$

Dans le cadre de l'approximation des mouvements de faible amplitude, nous avons $\sin(\beta) \approx \beta \approx \tan(\beta) = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}$. A l'aide d'un développement limité au premier ordre non nul on obtient :

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_x = \frac{T}{2} \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} \right)^2$$

et

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_y = -T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0}$$

Q15. Pour une onde sinusoïdale de célérité c dans un milieu non dispersif, on a :

$$c = \frac{\omega}{k}$$

On reprend l'équation d'onde (1) et on identifie l'expression de la célérité avec l'équation de d'Alembert $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$. On trouve :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Q16. L'onde résultante pour les $x < 0$ est la somme $y_i(x, t) + y_r(x, t)$ (principe de superposition) soit

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx) - A \sin(\omega t + kx) = -2A \cos(\omega t) \sin(kx)$$

Il s'agit d'une onde stationnaire

Q17. La projection de la force sur l'axe Ox dans le cas d'une telle onde est :

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_x = \frac{T}{2} \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} \right)^2 = \frac{T}{2} (-2A \cos(\omega t) k \cos(kx))^2$$

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_x = 2TA^2 k^2 \cos^2(\omega t)$$

On retrouve la valeur moyenne temporelle est donc :

$$\langle \vec{F} \cdot \vec{e}_x \rangle = 2TA^2 k^2 \frac{1}{2} = TA^2 k^2$$

Q18. La densité linéique d'énergie de l'onde s'exprime :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2} \rho (2A\omega \sin(\omega t) \sin(kx))^2 + \frac{1}{2} T (-2A \cos(\omega t) k \cos(kx))^2$$

$$\varepsilon(x, t) = 2\rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kx) + 2TA^2 k^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kx)$$

La moyenne spatiale de l'énergie linéique de l'onde résultante est :

$$\langle \varepsilon(x, t) \rangle_{\text{espace}} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + TA^2 k^2 \cos^2(\omega t)$$

Avec la question Q14 :

$$\langle \varepsilon(x, t) \rangle_{\text{espace}} = \rho A^2 c^2 k^2 \sin^2(\omega t) + TA^2 k^2 \cos^2(\omega t)$$

$$\langle \varepsilon(x, t) \rangle_{\text{espace}} = TA^2 k^2 \sin^2(\omega t) + TA^2 k^2 \cos^2(\omega t)$$

$$\langle \varepsilon(x, t) \rangle_{\text{espace}} = TA^2 k^2 = \langle \vec{F} \cdot \vec{e}_x \rangle$$

Partie IV : Onde acoustique

Q19. On considère un obstacle en $x = 0$.

La valeur moyenne de la pression de l'onde incidente au niveau de l'obstacle est nulle car elle est proportionnelle à $\cos(\omega t)$. La pression acoustique ne permet pas d'expliquer le phénomène de pression de radiation.

Q20. Dans le cas d'une onde plane progressive on a :

$$p_1 = Z_{\text{air}} v_1 = \rho_0 c v_1$$

Alors :

$$e(x, t) = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{p_{1,0} \cos(\omega t - kx)}{\rho_0 c} \right)^2 + \frac{1}{2} \chi_0 (p_{1,0} \cos(\omega t - kx))^2$$

$$e(x, t) = \left(\frac{1}{2 \rho_0} \frac{p_{1,0}^2}{c^2} + \frac{1}{2} \chi_0 p_{1,0}^2 \right) \cos^2(\omega t - kx)$$

Sachant que $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$:

$$e(x, t) = \left(\frac{1}{2} \chi_0 p_{1,0}^2 + \frac{1}{2} \chi_0 p_{1,0}^2 \right) \cos^2(\omega t - kx)$$

$$e(x, t) = \chi_0 p_{1,0}^2 \cos^2(\omega t - kx) = \chi_0 p_1^2$$

Q21. La densité volumique d'énergie de l'onde totale (incidente et réfléchie) :

$$e_{tot}(x, t) = \chi_0 p_{1,0}^2 \cos^2(\omega t - kx) + \chi_0 p_{1,0}^2 \cos^2(\omega t + kx)$$

On se place au niveau de l'obstacle en $x = 0$.

$$e_{tot}(0, t) = 2 \chi_0 p_{1,0}^2 \cos^2(\omega t)$$

En considérant l'égalité entre la pression de radiation et la moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie (comme dans les parties précédentes) :

$$p_{radiation} = \langle e_{tot}(0, t) \rangle = \chi_0 p_{1,0}^2$$

Q22. Le poids de la masse mesuré est proportionnel à la pression de radiation sur le plateau de la balance $p_{radiation}$.

L'amplitude de la tension U_e est proportionnelle à l'amplitude de la pression acoustique de l'onde ultrasonore $p_{1,0}$.

La relation de proportionnalité entre la pression de radiation et le carré de l'amplitude de la pression acoustique comme dans la formule $p_{radiation} = \chi_0 p_{1,0}^2$ se retrouve en traçant m en fonction de U_e^2 . On réalise alors un ajustement des points expérimentaux par une fonction affine.

Vérification de la proportionnalité entre la pression de radiation et le carré de l'amplitude de la pression acoustique

