

Concours National Commun 2024

Filière MP - Maths I

Corrigé proposé par Hamdane Mohammed¹

Toutes suggestions et remarques sont les bienvenues à : hamdane75mac@gmail.com

Exercice 1.

On pose $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$ et pour tout entier naturel non nul n , $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-3x} dx$.

Q1. a) Soit $A > 0$. On a

$$\int_0^A e^{-3x} dx = \left[\frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^A = \frac{1}{3} (1 - e^{-3A}) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$$

donc I_0 est une intégrale convergente, et $I_0 = \frac{1}{3}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance comparée on a $x^{n+2} e^{-3x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $x^n e^{-3x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

c) La fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{-3x}$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente (intégrale de Riemann), d'après le critère de négligeabilité l'intégrale I_n est convergente.

Q2. Soient n un entier naturel et A un réel positif. Les fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto e^{-3x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Une intégration par parties fournit

$$\int_0^A x^{n+1} e^{-3x} dx = \left[\frac{-x^{n+1} e^{-3x}}{3} \right]_0^A + \frac{(n+1)}{3} \int_0^A x^n e^{-3x} dx = \frac{-A^{n+1}}{3} e^{-3A} + \frac{(n+1)}{3} \int_0^A x^n e^{-3x} dx \quad (*)$$

Q3. On a $\frac{-A^{n+1}}{3} e^{-3A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$ (croissance comparée) et on fait tendre A vers l'infini dans $(*)$, on obtient pour tout entier naturel n ,

$$I_{n+1} = \frac{(n+1)}{3} I_n.$$

Q4. Raisonnons par récurrence sur n .

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, d'après la question **Q1)** on a $I_0 = \frac{1}{3}$ donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le résultat est vrai pour tout entier n et montrons qu'il est aussi vrai pour $n + 1$.
D'après **Q3)**, on a $I_{n+1} = \frac{(n+1)}{3} I_n$, puis par **H.R** on a $I_{n+1} = \frac{(n+1)}{3} \times \frac{n!}{3^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{3^{n+2}}$.
- **Conclusion :** Par le principe de récurrence, on a pour tout entier naturel n , $I_n = \frac{n!}{3^{n+1}}$.

Q5. Soit X la variable aléatoire de densité la fonction f définie par,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{9}{4} (1+x) e^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¹. Professeur agrégé en CPGE - Ibn Timiya Marrakech.

- a) la fonction $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, en effet : comme les intégrales I_1 et I_2 sont convergentes, alors

$$\int_0^{+\infty} xf(x) dx = \frac{9}{4} \int_0^{+\infty} (x+x^2)e^{-3x} dx = \frac{9}{4} \int_0^{+\infty} xe^{-3x} dx + \frac{9}{4} \int_0^{+\infty} x^2e^{-3x} dx = \frac{9}{4} (I_1 + I_2)$$

est une intégrale convergente, on en déduit que la variable aléatoire X admet une espérance, et on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{+\infty} xf(x) dx = \frac{9}{4} (I_1 + I_2) = \frac{9}{4} \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{27} \right) = \frac{5}{12}.$$

- b) La variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2, en effet : comme les intégrales I_2 et I_3 sont convergentes, alors

$$\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{9}{4} \int_0^{+\infty} (x^2+x^3)e^{-3x} dx = \frac{9}{4} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-3x} dx + \frac{9}{4} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-3x} dx = \frac{9}{4} (I_2 + I_3)$$

est une intégrale convergente, on en déduit que la variable aléatoire X admet une espérance, et on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{9}{4} (I_2 + I_3) - \left(\frac{5}{12} \right)^2 = \frac{9}{4} \left(\frac{2}{27} + \frac{2}{27} \right) - \frac{25}{144} = \frac{1}{3} - \frac{25}{144} = \frac{23}{144}.$$

Problème 1.

Pour tout réel strictement positif t , on considère les deux fonctions f_t et g_t qui sont définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_t(x) = e^{-t\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ tx f_t(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

Dans toute la suite du problème, on prend t un réel strictement positif.

Partie 1 : Étude d'une variable aléatoire

On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continue par morceaux est une densité de probabilité si f est positive sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des points de discontinuité de f est une partie finie de $\mathbb{R}$, f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$

- Q 1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n f_t(x)$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et par croissance comparée on a $x^2 f_t(x) = x^{n+2} e^{-t\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (car $t > 0$) donc $x^n f_t(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (intégrale de Riemann), alors l'intégrale I_n est aussi convergente (d'après le critère de négligeabilité).

- b) Par le changement de variable $u = x\sqrt{t}$ (donc $du = \sqrt{t} dx$), on a

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{t}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

D'où le résultat.

- c) Soit $A > 0$, on a

$$\int_0^A xe^{-t\frac{x^2}{2}} dx = \left[-\frac{e^{-t\frac{x^2}{2}}}{t} \right]_0^A = \frac{1}{t} \left(1 - e^{-t\frac{A^2}{2}} \right)$$

Comme $e^{-t\frac{A^2}{2}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit que

$$I_1 = \int_0^{+\infty} xe^{-t\frac{x^2}{2}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A xe^{-t\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{t}$$

Q 2. a) Soit n un entier et u un réel tels que $n \geq 2$ et $u \in [0, +\infty[$.

Comme $n \geq 2$, on peut écrire $\int_0^u x^n f_t(x) dx = \int_0^u x^{n-1} x e^{-t\frac{x^2}{2}} dx$. Les fonctions $x \mapsto x^{n-1}$ et $x \mapsto x e^{-t\frac{x^2}{2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} \int_0^u x^n f_t(x) dx &= \int_0^u x^{n-1} x e^{-t\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \left[x^{n-1} \frac{e^{-t\frac{x^2}{2}}}{-t} \right]_0^u + \frac{(n-1)}{t} \int_0^u x^{n-2} e^{-t\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{-u^{n-1}}{t} f_t(u) + \frac{(n-1)}{t} \int_0^u x^{n-2} f_t(x) dx \end{aligned}$$

b) On a $\frac{-u^{n-1}}{t} f_t(u) = \frac{-u^{n-1}}{t} e^{-t\frac{u^2}{2}} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$ (croissance comparée) et on fait tendre u vers l'infini dans l'égalité de la question précédente, on obtient pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$I_n = \frac{n-1}{t} I_{n-2}.$$

Q 3. a) La fonction $g_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue positive sur $\mathbb{R}$, montrons qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x) dx = 1$.

Comme g_t est nulle sur $\mathbb{R}^-$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x) dx = \int_0^{+\infty} g_t(x) dx$.

Soit $A > 0$. On a

$$\int_0^A g_t(x) dx = \int_0^A t x e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = \left[-e^{-t\frac{x^2}{2}} \right]_0^A = 1 - e^{-t\frac{A^2}{2}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$$

donc g_t est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x) dx = 1$. Ainsi g_t est une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X_t une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant g_t pour densité.

b) On a $F_t(x) = \mathbb{P}(X_t \leq x)$.

Si $x \leq 0$, alors $F_t(x) = 0$.

Si $x > 0$, alors $F_t(x) = \int_0^x g_t(s) ds = \int_0^x t s e^{-t\frac{s^2}{2}} ds = \left[-e^{-t\frac{s^2}{2}} \right]_0^x = 1 - e^{-t\frac{x^2}{2}}$.

Ainsi

$$F_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-t\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

c) la fonction $x \mapsto x g_t(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, en effet : d'après la question **Q1.a)** l'intégrale

$I_2 = \int_0^{+\infty} x^2 f_t(x) dx$ est convergente, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g_t(x) dx = \int_0^{+\infty} x g_t(x) dx = \int_0^{+\infty} t x^2 f_t(x) dx = t I_2$$

est aussi convergente, on en déduit que la variable aléatoire X_t admet une espérance, et on a

$$\mathbb{E}(X_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x g_t(x) dx = t I_2 = t \times \frac{1}{t} I_0 = I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

- d) Montrer que la variable aléatoire X_t admet une variance $\mathbb{V}(X_t)$ et déterminer sa valeur.
 La variable aléatoire X_t admet un moment d'ordre 2. En effet :
 la fonction $x \mapsto x^2 g_t(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, car l'intégrale I_3 est convergente et

$$\mathbb{E}(X_t^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_t(x) dx = \int_0^{+\infty} tx^3 f_t(x) dx = tI_3$$

donc la variable aléatoire X_t admet une variance $\mathbb{V}(X_t)$, et on a

$$\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) - (\mathbb{E}(X_t))^2 = tI_3 - \frac{\pi}{2t} = t \times \frac{2}{t}I_1 - \frac{\pi}{2t} = \frac{4 - \pi}{2t}$$

e) On a

$$\sigma(X_t) = 1 \iff \mathbb{V}(X_t) = 1 \iff \frac{4 - \pi}{2t} = 1 \iff t = \frac{4 - \pi}{2},$$

donc la valeur de t pour laquelle $\sigma(X_t) = 1$ est $t = \frac{4 - \pi}{2}$.

Q 4. Pour tout entier naturel k , on note les deux événements A_k et B_k de la façon suivante :

$$A_k = \left(\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1} \right) \quad \text{et} \quad B_k = \left(\sqrt{2k+1} < X_t \leq \sqrt{2k+2} \right)$$

a) ➤ On a

$$\mathbb{P}(A_k) = \int_{\sqrt{2k}}^{\sqrt{2k+1}} g_t(x) dx = \int_{\sqrt{2k}}^{\sqrt{2k+1}} tx e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = \left[-e^{-t\frac{x^2}{2}} \right]_{\sqrt{2k}}^{\sqrt{2k+1}} = e^{-tk} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right)$$

➤ De même

$$\mathbb{P}(B_k) = \int_{\sqrt{2k+1}}^{\sqrt{2k+2}} g_t(x) dx = \int_{\sqrt{2k+1}}^{\sqrt{2k+2}} tx e^{-t\frac{x^2}{2}} dx = \left[-e^{-t\frac{x^2}{2}} \right]_{\sqrt{2k+1}}^{\sqrt{2k+2}} = e^{-t(k+1)} \left(e^{\frac{t}{2}} - 1 \right).$$

- b) i) $\sum_{n \geq 0} e^{-nt}$ est une série géométrique convergente (car $0 < e^{-t} < 1$) de somme $\frac{1}{1 - e^{-t}}$, donc
 la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente de somme

$$S_A(t) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{2}}}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{t}{2}}}$$

- ii) Montrer que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

$\sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)t}$ est une série géométrique convergente (car $0 < e^{-t} < 1$) de somme $\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}$,

donc la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ est convergente de somme

$$S_B(t) = \frac{e^{-t} \left(e^{\frac{t}{2}} - 1 \right)}{1 - e^{-t}} = \frac{e^{\frac{t}{2}} - 1}{e^t - 1} = \frac{1}{1 + e^{\frac{t}{2}}}$$

- iii) Supposons avoir l'égalité $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$ (*), comme les événements A_n (resp B_n) sont deux à deux incompatibles, alors $S_A(t) = S_B(t)$ (car $\mathbb{P}$ est une probabilité),
 mais $S_A(t) = S_B(t) \iff t = 0$, ce qui est absurde.

Partie 2 : Calcul d'une integrale impropre

Pour tout entier n tel que $n \geq 0$ et pour tout réel x , on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-tx)^k}{k!} f_t(x)$. Pour tout entier n tel que $n \geq 0$, on definit le moment d'ordre n de la fonction f_t par, $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_t(x) dx$, (on rappelle que m_n dépend de t).

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$m_{2k+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+1} f_t(x) dx = 0 \quad (\text{car la fonction } x \mapsto x^{2k+1} f_t(x) \text{ est impaire})$$

et

$$m_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} f_t(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^{2k} f_t(x) dx = 2I_{2k} \quad (\text{car la fonction } x \mapsto x^{2k} f_t(x) \text{ est paire})$$

En utilisant la relation de la question **Q2.b**), on montre (par récurrence) que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{(2t)^k k!} I_0 = \frac{(2k)!}{(2t)^k k!} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$$

Q2. Soient a, b et c des réels tel que $a > 0$.

- La fonction $x \mapsto e^{-(ax^2+bx+c)}$ est continue positive sur $\mathbb{R}$ et par croissance comparée on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 e^{-(ax^2+bx+c)} = 0$ (car $a > 0$), donc $e^{-(ax^2+bx+c)} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et comme les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$ convergent, alors l'intégrale en question est aussi convergente (d'après le critère de négligeabilité).
- En utilisant la forme canonique du trinôme

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

on obtient,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = e^{\frac{\Delta}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2} dx$$

Pour calculer la seconde intégrale on va utiliser le changement de variable $s = \sqrt{2a}x + \frac{b}{\sqrt{2a}}$ avec $ds = \sqrt{2a} dx$ et $s \rightarrow \pm\infty$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2} dx &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \times 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \quad (\text{car la fonction } s \mapsto e^{-\frac{s^2}{2}} \text{ est paire}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \times 2 \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\Delta}{4a}}.$$

Q 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{t}{2}x^2 + tx)} dx$ est convergente d'après la question précédente, et sa valeur est $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{a}{4a}}$ avec $a = \frac{t}{2}$, $b = t$ et $c = 0$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{\frac{t}{2}}.$$

Q 4. On a $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-tx)^k}{k!} f_t(x) = f_t(x) \sum_{k=0}^n \frac{(-tx)^k}{k!}$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f_t(x) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-tx)^k}{k!} = e^{-tx} f_t(x)$$

Q 5. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx$$

(S_n) est une suite de fonctions continue sur $\mathbb{R}$, converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue par morceaux (même continue), et on a la domination suivante

$$|S_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{t^k |x|^k}{k!} f_t(x) \leq e^{t|x|} f_t(x) = \varphi(x)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-tx)^k}{k!} f_t(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^k}{k!} m_k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!} \end{aligned}$$

Q 6. Comme $m_{2k+1} = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} m_k \frac{t^k}{(k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f_t(x) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{\frac{t}{2}}$$

Q 7. On a $\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^\alpha}$ où $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{2}} dt$ est convergente.

Q 8. D'après la question **Q6)** on a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{2}} dt &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{(2t)^k k!} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \frac{t^{2k}}{(2k)!} dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k-\frac{1}{2}}}{2^k k!} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-\frac{1}{2}}}{2^k k!} \right) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt + \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-\frac{1}{2}}}{2^k k!} dt \\
 &= 2 + \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-\frac{1}{2}}}{2^k k!} dt
 \end{aligned}$$

Posons, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$, $h_k(t) = \frac{t^{k-\frac{1}{2}}}{2^k k!}$. La suite de fonctions $(h_k)_{k \geq 1}$ est continue sur le segment $[0, 1]$ et la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} h_k(t)$ converge normalement (donc uniformément) sur le segment $[0, 1]$, d'après le théorème d'interversion série-intégrale

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-\frac{1}{2}}}{2^k k!} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^{k-\frac{1}{2}}}{2^k k!} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k!} \int_0^1 t^{k-\frac{1}{2}} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k! (k + \frac{1}{2})} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k! (2k + 1) 2^{k-1}}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{t}{2}} dt = 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k! (2k + 1) 2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k! (2k + 1) 2^{k-1}}$$

Partie 3 : Produit de convolution et une transformation

Q 1. Il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- La fonction nulle est un élément de E car $|0| \leq f_t(x)$ avec $M = \lambda = 1$.
- Soit $h_1, h_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, montrons que $\alpha h_1 + h_2 \in E$.

On a $h_1 \in E$ donc il existe $M_1 \geq 0$ et $\lambda_1 > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : |h_1(x)| \leq M_1 f_t(\lambda_1 x)$.

De même pour h_2 , $|h_2(x)| \leq M_2 f_t(\lambda_2 x)$.

$$\begin{aligned}
 |\alpha h_1(x) + h_2(x)| &\leq |\alpha| M_1 f_t(\lambda_1 x) + M_2 f_t(\lambda_2 x) \\
 &\leq (|\alpha| M_1 + M_2) f_t(\min(\lambda_1, \lambda_2) x) \\
 &\leq M f_t(\lambda x) \quad \text{avec } M = |\alpha| M_1 + M_2 \geq 0 \text{ et } \lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2) > 0
 \end{aligned}$$

Donc $\alpha h_1 + h_2 \in E$, par suite E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

La fonction f_t est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} : |f_t(x)| \leq M f_t(\lambda x)$ (avec $M = \lambda = 1$) donc $f_t \in E$.

Q 2. Soient φ et ψ deux éléments de E . On note $\varphi * \psi$ l'application définie, pour tout réel x , pour lequel l'intégrale existe, par $(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \psi(x - u) du$.

a) Montrons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \psi(x - u) du$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\varphi(u) \psi(x - u)| \leq M_1 f_t(\lambda_1 u) M_2 f_t(\lambda_2 (x - u)) \leq M_1 M_2 f_t(\lambda_1 u). \quad (\text{car } \forall x \in \mathbb{R}, 0 < f_t(x) \leq 1)$$

Comme l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_t(\lambda_1 u) du$ converge, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \psi(x - u) du$ est absolument convergente donc convergente. D'où $\varphi * \psi$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Par le changement de variable $v = x - u$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \psi(x-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-v) \psi(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v) \varphi(x-v) dv = (\psi * \varphi)(x)$$

D'où $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} (f_t * f_t)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(u) f_t(x-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(tu^2 - txu + \frac{t}{2}x^2)} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(au^2 + bu + c)} du \quad \left(\text{avec } a = t, b = -tx \text{ et } c = \frac{t}{2}x^2 \right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (\text{d'après la question Q2) de la partie 2}) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-t \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} f_t\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

d) $(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \psi(x-u) du.$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u \mapsto \varphi(u) \psi(x-u)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$|\varphi(u) \psi(x-u)| \leq M_1 f_t(\lambda_1 u) M_2 f_t(\lambda_2(x-u)) \leq M_1 M_2 f_t(\lambda_1 u).$$

La fonction $u \mapsto M_1 M_2 f_t(\lambda_1 u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto (\varphi * \psi)(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
On a aussi

$$\begin{aligned} |(\varphi * \psi)(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} M_1 f_t(\lambda_1 u) M_2 f_t(\lambda_2(x-u)) du \\ &\leq M_1 M_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(\lambda u) f_t(\lambda(x-u)) du \quad (\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2) > 0) \\ &\leq \frac{M_1 M_2}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(v) f_t(\lambda x - v) dv \quad (\text{par le changement } v = \lambda u) \\ &\leq \frac{M_1 M_2}{\lambda} (f_t * f_t)(\lambda x) \\ &\leq \frac{M_1 M_2}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{t}} f_t\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} x\right) \\ &\leq M f_t(\lambda' x) \quad \left(\text{avec } M = \frac{M_1 M_2}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \geq 0 \text{ et } \lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} > 0 \right) \end{aligned}$$

D'où $\varphi * \psi \in E$.

Q3. Soit φ un élément de E . On définit la fonction $\widehat{\varphi}$ par $\widehat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu} \varphi(u) du.$

a) $\widehat{\varphi}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$|e^{-xu} \varphi(u)| \leq M e^{-xu} e^{-\frac{t}{2}(\lambda u)^2} \underset{u \rightarrow \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

Puis par le critère de négligeabilité $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu} \varphi(u) du$ est absolument convergente donc elle est convergente.

Ainsi $\widehat{\varphi}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Posons $h(x, u) = e^{-xu} \varphi(u).$

- Pour tout $u \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h(x, u)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec
- $$\frac{\partial h}{\partial x}(x, u) = -ue^{-xu}\varphi(u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, u) = u^2e^{-xu}\varphi(u)$$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, les fonctions $u \mapsto h(x, u)$ et $u \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, u)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in [a, b]$, on a

$$\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, u) \right| = u^2 e^{-xu} |\varphi(u)| \leq \begin{cases} u^2 e^{-au} |\varphi(u)| & \text{si } u \geq 0 \\ u^2 e^{-bu} |\varphi(u)| & \text{si } u \leq 0 \end{cases} = \psi(u)$$

la fonction ψ est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\widehat{\varphi}'(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-xu}\varphi(u) du \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi}''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-xu}\varphi(u) du$$

Q 4. Soient φ et ψ deux éléments de E .

- a) On a $u^2 + (x - u)^2 = 2u^2 + x^2 - 2xu$ et $\forall \lambda > 0$, $2xu \leq \lambda u^2 + \frac{1}{\lambda}x^2$ (identité remarquable).
donc $\forall \lambda > 0$,

$$\begin{aligned} u^2 + (x - u)^2 &\geq 2u^2 + x^2 - \lambda u^2 - \frac{1}{\lambda}x^2 \\ &\geq (2 - \lambda)u^2 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x^2 \end{aligned}$$

Pour $\lambda = \frac{3}{2}$, ($1 < \lambda < 2$), on obtient,

$$u^2 + (x - u)^2 \geq \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}x^2 \geq \frac{1}{3}(u^2 + x^2)$$

donc $\alpha = \frac{1}{3}$ convient.

- b) Posons $\phi(x, u) = \varphi(u)\psi(x - u)$. On a

$$\begin{aligned} |\phi(x, u)| &= |\varphi(u)\psi(x - u)| \\ &\leq M_1 M_2 e^{-\frac{t}{2}(\lambda x)^2} e^{-\frac{t}{2}(\lambda x - \lambda u)^2} \quad (\text{avec } \lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)) \\ &\leq M_1 M_2 e^{-\frac{t}{2}\lambda^2(\alpha(u^2 + x^2))} \\ &= \left(M_1 e^{-\frac{t}{2}\lambda^2\alpha u^2}\right) \left(M_2 e^{-\frac{t}{2}\lambda^2\alpha x^2}\right) \\ &\leq \phi_1(u) \cdot \phi_2(x) \quad (\text{avec } \phi_1 \text{ et } \phi_2 \text{ continues et intégrables sur } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

D'après le résultat admis, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x - u) du \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x - u) dx \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - u) dx \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v) dv \right) du \quad (\text{par le changement } v = x - u) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v) dv \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx \end{aligned}$$

c) Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
 \widehat{(\varphi * \psi)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega u} (\varphi * \psi)(u) \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega u} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \psi(u-x) \, dx \right) \, du \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega x} \varphi(x) e^{-\omega(u-x)} \psi(u-x) \, dx \right) \, du \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1 * \varphi_2(x) \, dx \quad (\text{avec } \varphi_1(x) = e^{-\omega x} \varphi(x) \text{ et } \varphi_2 = e^{-\omega x} \psi(x)) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x) \, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x) \, dx \quad (\text{d'après Q4.b) de la partie 3}) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega x} \varphi(x) \, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega x} \psi(x) \, dx \\
 &= \widehat{\varphi}(\omega) \cdot \widehat{\psi}(\omega)
 \end{aligned}$$

Partie 4 : Une suite de fonctions construite à partir du produit de convolution

On note E_1 l'ensemble des fonctions ψ de E telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \, dx = 1$. Pour toute fonction ϕ de E_1 , on considère la suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ définie par $\phi_1 = \phi$ et pour tout entier $n \geq 2$, $\phi_n = \phi_{n-1} * \phi_1$.

Q 1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\phi_n \in E_1$.

- Pour $n = 1$, $\phi_1 = \phi \in E_1$ vraie.
- Soit $n \geq 2$, supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n - 1$.
On a $\phi_n = \phi_{n-1} * \phi_1 \in E$ (d'après la question Q2.d) de la partie 3), et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{n-1} * \phi_1(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{n-1} \, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x) \, dx = 1 \cdot 1 = 1.$$

- Conclusion : pour tout entier $n \geq 1$, $\phi_n \in E_1$.

Q 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel. On a $\widehat{\phi_2}(x) = \widehat{\phi_1 * \phi_1}(x) = \widehat{\phi}(x) \cdot \widehat{\phi}(x) = (\widehat{\phi}(x))^2$.

Puis par récurrence, on montre que

$$\widehat{\phi_n}(x) = \widehat{\phi_{n-1} * \phi_1}(x) = \widehat{\phi_{n-1}}(x) \cdot \widehat{\phi}(x) = (\widehat{\phi}(x))^n.$$

Q 3. Dans cette question, on prend $\phi = \left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}} \right) f_t$, où f_t est la fonction définie au début du problème.

a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que " $\exists C_n(t)$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \phi_n(x) = C_n(t) e^{-t \frac{x^2}{2n}}$ ".

- Pour $n = 1$, $\phi_1(x) = \phi(x) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} e^{-t \frac{x^2}{2}}$ et $C_1(t) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$.
- Soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $n - 1$. On a

$$\begin{aligned}
\phi_n(x) &= (\phi_{n-1} * \phi)(x) = C_{n-1}(t)C_1(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\frac{u^2}{2(n-1)}} e^{-t\frac{(x-u)^2}{2}} du \\
&= C_{n-1}(t)C_1(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{nt}{2(n-1)}u^2 - (xt)u + t\frac{x^2}{2}\right)} du \\
&= C_{n-1}(t)C_1(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(au^2+bu+c)} du \quad \left(\text{avec } a = \frac{nt}{2(n-1)}, b = -xt \text{ et } c = t\frac{x^2}{2}\right) \\
&= C_{n-1}(t)C_1(t) \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\Delta}{4a}} \quad \left(\text{d'après Q2) partie 2 avec } \Delta = \dots = t\frac{x^2}{2n}\right) \\
&= C_{n-1} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \sqrt{\frac{2\pi(n-1)}{nt}} e^{-t\frac{x^2}{2n}} \\
&= C_{n-1} \sqrt{\frac{n-1}{n}} e^{-t\frac{x^2}{2n}} \\
&= C_n(t) e^{-t\frac{x^2}{2n}} \quad \left(\text{avec } C_n(t) = \sqrt{\frac{n-1}{n}} C_{n-1}(t)\right)
\end{aligned}$$

On a $C_n(t) = \sqrt{\frac{n-1}{n}} C_{n-1}$ donc $C_n(t) = \sqrt{\frac{(n-1)!}{n!}} C_1(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}}$.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $C_n(t)$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x) = C_n(t) e^{-t\frac{x^2}{2n}}$.

b) On a

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi_n} \left(u \sqrt{\frac{t}{n}} \right) &= \sqrt{\frac{t}{2n\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\sqrt{\frac{t}{n}}x} e^{-t\frac{x^2}{2n}} dx = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{2n}x^2 + \sqrt{\frac{t}{n}}ux\right)} dx \\
&= \sqrt{\frac{t}{2n\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx \quad \left(\text{avec } a = \frac{t}{2n}, b = \sqrt{\frac{t}{n}}u \text{ et } c = 0\right) \\
&= \sqrt{\frac{t}{2n\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\Delta}{4a}} \quad \left(\text{d'après Q2) partie 2 avec } \Delta = \dots = \frac{t}{n}u^2\right) \\
&= \sqrt{\frac{t}{2n\pi}} \times \sqrt{\frac{2n\pi}{t}} e^{\frac{u^2}{2}} \\
&= e^{\frac{u^2}{2}}
\end{aligned}$$

donc la constante cherchée est $\nu = \frac{1}{2}$.

Q 4. Soit ϕ un élément quelconque de E_1 . On pose pour tout entier naturel non nul n ,

$$M_{n,1} = \int_{-\infty}^{+\infty} u\phi_n(u) du, \quad M_{n,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\phi_n(u) du \quad \text{et } V_n = M_{n,2} - M_{n,1}^2$$

a) On a $\phi_1 \in E_1$ (d'après la question **Q1**) de la partie 4), donc $\widehat{\phi_n}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (d'après la question **Q3.b**) de la partie 3)

On en déduit que $\widehat{\phi_n}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi_n}(x) &= \widehat{\phi_n}(0) + \widehat{\phi_n}'(0)x + \frac{1}{2}\widehat{\phi_n}''(0)x^2 + o(x^2) \\
&= 1 - M_{n,1}x + \frac{1}{2}M_{n,2}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
 \widehat{\phi}_n(x) &= \left(\widehat{\phi}_1(x) \right)^n \\
 &= \left(1 - M_{1,1}x + \frac{1}{2}M_{1,2}x^2 + o(x^2) \right)^n \\
 &= 1 + n \left(-M_{1,1}x + \frac{1}{2}M_{1,2}x^2 \right) + \frac{n(n-1)}{2}M_{1,1}^2x^2 + o(x^2) \\
 &= 1 - nM_{1,1}x + \frac{1}{2} \left(nM_{1,2} + n(n-1)M_{1,1}^2 \right) x^2 + o(x^2)
 \end{aligned}$$

L'unicité du développement limité donne $M_{n,1} = nM_{1,1}$ et $M_{n,2} = nM_{1,2} + n(n-1)M_{1,1}^2$, donc

$$V_n = M_{n,2} - M_{n,1}^2 = nM_{1,2} + n(n-1)M_{1,1}^2 - n^2M_{1,1}^2 = nM_{1,2} - nM_{1,1}^2 = nV_1$$

Q 5. On suppose de plus dans cette question que la fonction ϕ vérifie $M_{1,1} = 0$.

On a $\widehat{\phi}_n(x) = \left(\widehat{\phi}_1(x) \right)^n = \left(1 + \frac{1}{2}M_{1,2}x^2 + o(x^2) \right)^n$

donc

$$\widehat{\phi}_n \left(u \sqrt{\frac{t}{n}} \right) = \left(\widehat{\phi}_1 \left(u \sqrt{\frac{t}{n}} \right) \right)^n = \left(1 + \frac{1}{2}M_{1,2}u^2 \frac{t}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp \left(\frac{M_{1,2}tu^2}{2} \right)$$