

Correction proposée par :
EL AMDAOUI MUSTAPHA
elamdaoui@gmail.com

EXERCICE : Calcul des puissances d'une matrice

1. (a) On a :

$$PQ = P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4I_3$$

- (b) Nous avons établi que : $PA = 4I_3$.

Cela signifie que P est inversible et que son inverse est donné par :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}Q$$

2. (a) u est un vecteur non nul et on a

$$Au = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, u est un vecteur propre de la matrice A avec la valeur propre correspondante $\alpha = 1$.

- (b) v est non nul et le calcul de Av donne :

$$Av = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v$$

Ainsi, v est un vecteur propre de A associé à la valeur propre : $\beta = 2$.

De même w est non nul et le calcul de Aw donne :

$$Aw = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2w$$

Ainsi, w est un vecteur propre de A associé à la valeur propre : $\beta = 2$.

- (c) On sait que $P = \text{Mat}_\beta(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, donc (u, v, w) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A , donc, par la formule de changement de bases

$$D = P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, 2)$$

3. (a) • **Initialisation** : Pour $n = 0$, nous avons : $A^0 = I_3$ où I est la matrice identité. D'autre part, $D^0 = I$ aussi (car toute matrice à la puissance 0 est la matrice identité). Donc :

$$A^0 = PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I_3$$

- **Hérédité** : Soit $k \in \mathbb{N}$, on a

$$A^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous avons :

$$A^{k+1} = A^k A = (PD^k P^{-1})A$$

Nous savons que $A = PDP^{-1}$, donc :

$$A^{k+1} = (PD^k P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k (P^{-1}P)DP^{-1}$$

Comme $P^{-1}P = I_3$, nous obtenons :

$$A^{k+1} = PD^k DP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$$

(b) Pour D^n , nous avons :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà P et P^{-1} :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Substituons D^n dans l'expression de A^n :

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Calculons d'abord PD^n :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{n+1} \\ 2 & 2^n & -2^n \\ 1 & 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

Ensuite, multiplions à gauche par P^{-1} :

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{n+1} \\ 2 & 2^n & -2^n \\ 1 & 2^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le résultat final est :

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 1 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 & 2^{n+1} - 2 \\ 1 - 2^n & 1 - 2^n & 3 \cdot 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

PROBLÈME : Endomorphismes cycliques

1^{ère} partie

Noyaux itérés

4. Soit k un entier naturel. Soit $x \in \mathcal{N}_k$. Par définition, cela signifie que :

$$f^k(x) = 0$$

En utilisant la définition de f^{k+1} , nous avons :

$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$$

Ainsi, $x \in \mathcal{N}_{k+1}$. Cela prouve que :

$$\mathcal{N}_k \subseteq \mathcal{N}_{k+1}$$

Soit $y \in \mathcal{I}_{k+1}$. Par définition, cela signifie qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que :

$$f^{k+1}(x) = y$$

Notons que :

$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$$

Posons $z = f^k(x)$. Alors, nous avons $f(z) = y$. Ainsi, z est dans $\mathcal{I}_k$, ce qui montre que $y \in \mathcal{I}_k$.

Donc, nous avons :

$$\mathcal{I}_{k+1} \subseteq \mathcal{I}_k$$

Cela prouve que la suite $(\mathcal{I}_k)$ est décroissante et la suite $(\mathcal{N}_k)$ est croissante au sens de l'inclusion.

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'inclusion $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1}$ implique $\dim(\mathcal{N}_k) \leq \dim(\mathcal{N}_{k+1})$, donc la suite $(\dim(\mathcal{N}_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante.
6. Notons $(a_k)_{k \geq 0}$ la suite d'entiers naturels définie par $a_k = \dim \ker f^k$. Une telle suite est croissante et majorée par n , donc elle ne peut pas être strictement croissante et, par suite, il existe un entier k tel que $a_k = a_{k+1}$. Soit l'entier $q = \min\{k \in \mathbb{N}^*, a_k = a_{k+1}\}$, alors $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$, car $\mathcal{N}_q \subset \mathcal{N}_{q+1}$ et $\dim(\mathcal{N}_q) = \dim(\mathcal{N}_{q+1})$.
7. L'inclusion $\mathcal{I}_{q+1} \subset \mathcal{I}_q$ et le théorème du rang,

$$\dim \mathcal{I}_a = n - \dim(\mathcal{N}_q) = n - \dim(\mathcal{N}_{q+1}) = \dim(\mathcal{I}_{q+1}),$$

donnent l'égalité $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.

8. D'après le théorème du rang $\dim \mathcal{N}_q + \dim \mathcal{I}_q = \dim E$, donc il suffit de démontrer que $\mathcal{I}_q \cap \mathcal{N}_q = \{0\}$. Soit $x \in \ker f^q \cap \text{im } f^q$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = f^q(y)$ et $f^q(x) = 0$, soit $f^{2q}(y) = 0$, ou encore $y \in \ker f^{2q} = \ker f^q$, d'où $x = f^q(y) = 0$.
9. Pour tout entier naturel k , $\mathcal{I}_k$ est un sous-espace stable par f , car $f(\mathcal{I}_k) = \mathcal{I}_{k+1} \subset \mathcal{I}_k$.

(a) Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme donne

$$\dim(\mathcal{I}_k) = \dim \text{Ker}(\varphi_k) + \dim \text{Im}(\varphi_k)$$

Avec

$$\text{Im}(\varphi_k) = \varphi_k(\mathcal{I}_k) = f(\mathcal{I}_k) = \mathcal{I}_{k+1},$$

et,

$$\text{Ker}(\varphi_k) = \{x \in \mathcal{I}_k \mid \varphi_k(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{I}_k \mid f(x) = 0\},$$

soit, $\text{Ker}(\varphi_k) = \mathcal{I}_k \cap \text{Ker}(f)$, il vient $\dim \mathcal{I}_k = \dim(\mathcal{I}_k \cap \text{Ker}(f)) + \dim \mathcal{I}_{k+1}$, que l'on peut écrire

$$\dim(\mathcal{I}_k) - \dim(\mathcal{I}_{k+1}) = \dim(\mathcal{I}_k \cap \text{Ker}(f))$$

(b) Le théorème du rang et la dernière relation nous donnent

$$\dim(\mathcal{N}_{k+1}) - \dim(\mathcal{N}_k) = \dim(\mathcal{I}_k) - \dim(\mathcal{I}_{k+1}) = \dim(\mathcal{I}_k \cap \text{Ker}(f))$$

On sait que $\mathcal{I}_{k+1} \subset \mathcal{I}_k$ donc $\dim(\mathcal{I}_{k+1} \cap \text{Ker}(f)) \leq \dim(\mathcal{I}_k \cap \text{Ker}(f))$ et, par suite, on a

$$\dim(\mathcal{N}_{k+2}) - \dim(\mathcal{N}_{k+1}) \leq \dim(\mathcal{N}_{k+1}) - \dim(\mathcal{N}_k)$$

Donc la suite $(\dim(\mathcal{N}_{k+1}) - \dim(\mathcal{N}_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2^{ème} partie

Les endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$

10. (a) Par définition $\text{Im}(v) = v(\text{Im}(u^r)) = u^s(\text{Im}(u^r)) = \text{Im}(u^{s+r})$.
- (b) On a $\text{Ker}(v) = \text{Im}(u^r) \cap \text{Ker}(u^s) \subset \text{Ker}(u^s)$.
- (c) v est un endomorphisme de $\text{im}(u^r)$, alors par le théorème du rang, on a

$$\dim \text{Im}(v) + \dim \text{Ker}(v) = \dim \text{Im}(u^r)$$

Une autre fois par le théorème du rang appliqué à $u^{r+s} \in \mathcal{L}(E)$

$$\dim \text{Im}(u^{s+r}) + \dim \text{Ker}(u^{s+r}) = n$$

Avec $\text{im}(v) = \text{im}(u^{r+s})$, il vient que $\dim(\text{Im}(v)) = \dim \text{Im}(u^{s+r})$, puis

$$\begin{aligned} \dim \ker(u^{r+s}) &= n - \dim \text{im}(u^{r+s}) = n - \dim \text{im}(v) \\ &= n - (\dim \text{im}(u^r) - \dim \ker(v)) \\ &= \dim \ker(u^r) + \dim \ker(v) \end{aligned}$$

Or $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$, donc $\dim \text{Ker}(v) \leq \dim \text{Ker}(u^s)$ ainsi

$$\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$$

(d) Par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$.

- **Base de récurrence :** Le résultat est vrai pour $i = 0$ car $u^0 \text{id}_E$ est injectif et aussi pour $i = 1$, car u est de rang $n - 1$ et donc $\dim(\text{Ker}(u)) = 1 \leq 1$
- **Hérédité :** Soit $i \in \mathbb{N}$ et supposons que $\dim \ker(u^i) \leq i$. La question précédente indique que

$$\dim(\text{Ker}(u^{i+1})) \leq \dim(\text{Ker}(u^i)) + \dim(\text{Ker}(u))$$

Comme u est de rang $n - 1$ alors $\text{Ker}(u)$ est de dimension 1 et l'hypothèse de récurrence donne

$$\dim(\text{Ker}(u^{i+1})) \leq i + 1$$

ce qui prouve le résultat au rang $i + 1$.

Si $i \geq n + 1$ le résultat est évident. Ainsi pour tout i dans $\mathbb{N}$, $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.

11. (a) Par récurrence finie descendante.

- **Base de récurrence :** Rien à démontrer, car $\dim \ker(u^n) = \dim E = n$
- **Hérédité :** Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on suppose que $\dim \ker(u^k) = k$. D'après la question précédente

$$k = \dim \ker(u^k) \leq \dim \ker(u^{k-1}) + \dim \ker(u) \leq \dim \ker(u^{k-1}) + 1,$$

donc

$$k - 1 \leq \dim \ker(u^{k-1})$$

et comme $\dim \ker(u^{k-1}) \leq k - 1$, alors $\dim \ker(u^{k-1}) = k - 1$

Récurrence achevée

- (b) L'endomorphisme $u^{n-1} \neq 0$ car $\dim \ker(u^{n-1}) = n - 1$ et $u^n = 0$, donc l'indice de nilpotence de u égale n .
- (c) Comme $u^{n-1} \neq 0$, il existe donc $e \in E \setminus \{0\}$ tel que $u^{n-1}(e) \neq 0$. Montrons que $(e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(e) = 0$. Supposons qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i = \min\{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / \lambda_k \neq 0\}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(e) = 0 &\Rightarrow \sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k u^k(e) = 0 \Rightarrow u^{n-1-i} \left(\sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k u^k(e) \right) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k u^{n-1-i+k}(e) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_i u^{n-1}(e) = 0 \quad (\text{car pour } k \geq i+1, n-1-i+k \geq n \text{ et donc } u^{n-1-i+k} = 0) \\ &\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{car } u^{n-1}(e) \neq 0) \end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de i .

Donc tous les coefficients λ_k sont nuls. La famille $(u^k(e))_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre de bon cardinal, donc il s'agit bien d'une base de E .

(d) La matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Soit A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$ de rang $n - 1$, posons f_A et f_B les endomorphismes de E canoniquement associés à A et B , il existe donc deux bases $\mathcal{B}_e$ et $\mathcal{B}_{e'}$ de E dans lesquelles les matrices de f_A et de f_B sont identiques à la matrice de la question 11d, ce qui prouve que A et B sont semblables.

3^{ème} partie

Réduction d'un endomorphisme particulier

13. Soit $1 \leq k \leq p$, l'endomorphisme $(f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}$ est un polynôme en f , donc il commute avec f , donc $\text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k})$ est stable par f .
14. Les polynômes $(X - \lambda_1)^{m_1}, \dots, (X - \lambda_p)^{m_p}$ sont deux à deux premiers entre eux, on déduit, par le théorème de décomposition des noyaux, que

$$\text{Ker} \left(\prod_{k=1}^p (f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k} \right) = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}) = \bigoplus_{k=1}^p F_k$$

D'après le théorème de Cayley Hamilton on a $\prod_{k=1}^p (f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k} = \chi_f(f) = 0$, donc

$$\text{Ker} \left(\prod_{k=1}^p (f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k} \right) = E,$$

puis

$$E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$$

15. Pour tout entier $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, posons $\varphi_k = f|_{F_k} - \lambda_k \text{id}_{F_k} \in \mathcal{L}(F_k)$, on a pour tout $x \in F_k$, $\varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.
- (a) Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, pour tout x dans F_k on a $\varphi_k^{m_k}(x) = (f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}(x) = 0$ donc $\varphi_k^{m_k} = 0$ et φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .
- (b) Remarquons que $\varphi_k = f|_{F_k} - \lambda_k \text{id}_{F_k}$ et $(X - \lambda_k)^{m_k}$ est un polynôme annulateur de $f|_{F_k}$ donc $\text{Sp}(f|_{F_k}) = \{\lambda_k\}$, on en déduit que $\chi_{f|_{F_k}}(X) = (X - \lambda_k)^{\dim F_k}$.
 F_k est un sous espace stable par f donc $\chi_{f|_{F_k}}$ divise χ_f , ce qui donne $\dim F_k \leq m_k$.
 Le degré du polynôme caractéristique χ_f est égal à $\sum_{k=1}^p m_k = n$ et on a aussi $\sum_{k=1}^p \dim F_k = n$ par supplémentarité des sous-espaces $F_k, \dots, F_p$, ainsi pour tout k dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ on a $\dim F_k = m_k$.
- (c) Supposons que $\varphi_k^{m_k-1} = 0$. Alors le polynôme $Q = (X - \lambda_k)^{m_k-1} \prod_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{k\}} (X - \lambda_i)^{m_i}$ est un polynôme annulateur de f , car l'endomorphisme $Q(f)$ s'annule sur chaque sous-espace F_k ; or le degré de Q est $n - 1$; on en déduirait donc une relation de dépendance pour la famille $(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ ce qui est contraire à l'hypothèse de la liberté de $(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$.
16. Pour tout entier k dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, $\varphi_k \in \mathcal{L}(F_k)$ est nilpotent d'ordre $m_k = \dim F_k$, d'après 11d il existe une base $\mathcal{B}_k$ de F_k telle que la matrice de φ_k dans cette base est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m_k}(\mathbb{C}).$$

Comme $f|_{F_k} = \varphi_k - \lambda_k \text{id}_{F_k}$, alors sa matrice dans la base $\mathcal{B}_k$ est de la forme

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs de la forme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_p)$.

4^{ème} partie Cycles

17. (a) Soit $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on a

$$f^p(f^k(x_0)) = f^k(f^p(x_0)) = f^k(x_0).$$

On en déduit que f^p et id_E , deux endomorphismes de E , coïncident sur une famille génératrice, donc ils sont égaux :

$$f^p = \text{id}_E.$$

(b) F_{x_0} est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide, car il contient 1 vu que (x_0) est libre, et il est majoré par $\dim E$ puisque toute famille libre de E a un cardinal plus petit que la dimension de E . Par la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, l'ensemble F_{x_0} admet un maximum noté γ .

(c) i. Par récurrence sur $k \geq \gamma$.

- **Base de récurrence :** Par définition de γ , l'entier $\gamma+1 \notin F_{x_0}$, donc $(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0), f^{\gamma}(x_0))$ est liée. Comme $(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$ est libre, alors $f^{\gamma}(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$.
- **Hérédité :** Soit $k \geq \gamma$ et supposons que $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$. Alors, $f^{k+1}(x_0) \in \text{Vect}(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{\gamma}(x_0))$. Comme $f^{\gamma}(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$, nous avons bien $f^{k+1}(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$.
Finalement, pour tout entier $k \geq \gamma$, $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$.

ii. D'après la question précédente $\forall k \geq \gamma$, $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$. Pour $k < \gamma-1$, l'appartenance est triviale. Ainsi,

$$E = \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) = \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)).$$

Comme $(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$ est libre, cela constitue une base de E et $\dim E = n = \gamma$.

iii. D'après la question 17a, nous avons $f^p = \text{id}_E$, ce qui implique que $X^p - 1$ est un polynôme annulateur de f . Par conséquent, le polynôme minimal π_f divise $X^p - 1$, qui est scindé en racines simples.

De plus, la liberté de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ montre que la famille $(\text{id}_E, \dots, f^{n-1})$ est également libre, ce qui implique que $\deg \pi_f \geq n$. Ainsi, nous concluons que $\deg \pi_f = n$ puisque le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. En conséquence, le polynôme minimal de f est scindé et à racines simples, ce qui signifie que f admet n valeurs propres distinctes.

18. (a) Par hypothèse, $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est un n -cycle de f . Cela signifie que $\mathcal{B}_{x_0}$ est une famille génératrice de E de cardinal $n = \dim E$, ce qui fait d'elle une base de E .

(b) Nous avons

$$f(f^j(x_0)) = \begin{cases} f^j(x_0) & \text{si } 0 \leq j \leq n-2 \\ x_0 & \text{si } j = n-1 \end{cases}$$

Ce qui permet d'exprimer la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}_{x_0}$ sous la forme suivante :

$$G = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{x_0}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Nous avons

$$GU_k = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^{nk} \\ \bar{\omega}^k \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \omega^k \cdot \bar{\omega}^k \begin{pmatrix} \bar{\omega}^{nk} \\ \bar{\omega}^k \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \omega^k \begin{pmatrix} \bar{\omega}^k \\ \bar{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{nk} \end{pmatrix} = \omega^k U_k.$$

Ainsi, U_k est un vecteur propre de G associé à la valeur propre ω^k .

19. (a) Posons $M\overline{M} = (a_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ et soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Par définition du produit matriciel, nous avons

$$\begin{aligned} a_{k,\ell} &= \sum_{j=1}^n m_{k,j} \overline{m}_{j,\ell} \\ &= \sum_{j=1}^n \bar{\omega}^{kj} \omega^{j\ell} \\ &= \sum_{j=1}^n (\omega^{\ell-k})^j. \end{aligned}$$

Soit $a_{k,\ell} = \sum_{j=1}^n (\omega^{\ell-k})^j$, qui représente la somme des racines n -ièmes de l'unité.

- Si $\ell = k$, alors $a_{k,\ell} = n$.
- Si $\ell \neq k$, alors

$$a_{k,\ell} = \omega^{\ell-k} \frac{1 - (\omega^{\ell-k})^n}{1 - \omega^{\ell-k}} = 0 \quad (\text{car } (\omega^{\ell-k})^n = (\omega^n)^{\ell-k} = 1).$$

Nous concluons que $M\overline{M} = nI_n$.

(b) D'après la question précédente, nous avons donc $M \cdot \overline{M} = nI$. Par conséquent, M est inversible, et l'inverse de M est donné par

$$M^{-1} = \frac{1}{n} \overline{M}.$$

20. (a) Remarquons que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, nous avons

$$G^k = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline I_{n-k} & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad G^0 = I_n.$$

Dès lors, nous pouvons exprimer H comme suit :

$$H = \sum_{k=0}^{n-1} b_k G^k.$$

Puisque G admet n valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. Par conséquent, H est également diagonalisable.

(b) Posons $Q = \sum_{\ell=0}^{n-1} b_\ell X^\ell$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous avons

$$HU_k = Q(G)U_k = Q(\omega^k)U_k.$$

Or, la famille $(U_1, \dots, U_n)$ constitue une base de $\mathbb{C}^n$, car la matrice associée à cette famille dans la base canonique, notée M , est inversible. Par conséquent, $(U_1, \dots, U_n)$ est une base propre pour H , ce qui implique que H est diagonalisable. Les valeurs propres correspondantes sont $Q(\omega), Q(\omega^2), \dots, Q(\omega^n)$.

5^{ème} partie

La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel des matrices nilpotentes

21. L'espace $\mathcal{T}$ des matrices strictement triangulaires est constitué des matrices carrées $n \times n$ qui contiennent des zéros sur la diagonale principale ainsi qu'au-dessus de celle-ci. Cela implique que tous les éléments a_{ij} avec $i < j$ sont nuls.

Chaque matrice dans $\mathcal{T}$ peut ainsi être exprimée comme une combinaison linéaire des matrices élémentaires $E_{i,j}$ où $i > j$. Le nombre total de ces matrices élémentaires est donné par le cardinal

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Par conséquent, la dimension de l'espace $\mathcal{T}$ est :

$$\dim \mathcal{T} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

22. Soit M une matrice nilpotente d'indice p , donc $\pi_M(X) = X^p$ qui est scindé, donc M est trigonalisable et elle est semblable à une matrice triangulaire de diagonale nulle.
23. Soit $A = (a_{i,j}) \in S_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}$. Nous montrons que A est la matrice nulle.

- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $a_{i,i} = 0$ car A est strictement triangulaire.
- Pour $i \neq j$:
 - Si $i > j$, alors $a_{i,j} = 0$ (strictement triangulaire).
 - Si $j > i$, alors par symétrie, $a_{j,i} = 0$.

Ainsi, $a_{i,j} = 0$ pour tous i, j , ce qui prouve que $A = 0$. Donc, $S_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T} = \{0\}$.

Avec $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\mathcal{T}) = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$, il vient que

$$\dim(S_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{T}) = \dim(M_n(\mathbb{R})).$$

Ainsi, nous avons $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}$.

24. Soit F un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ tel que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$. Supposons que $\dim(S_n(\mathbb{R}) \cap F) = 0$. D'après le théorème de Grassmann, nous avons :

$$\dim(S_n(\mathbb{R}) + F) = \dim(S_n(\mathbb{R})) + \dim(F) - \dim(S_n(\mathbb{R}) \cap F).$$

Comme nous supposons que $\dim(S_n(\mathbb{R}) \cap F) = 0$, l'équation se simplifie :

$$\dim(S_n(\mathbb{R}) + F) = \dim(S_n(\mathbb{R})) + \dim(F).$$

Nous savons que :

$$\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}.$$

En additionnant ces dimensions, nous obtenons :

$$\dim(S_n(\mathbb{R}) + F) > \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

Cependant, $\dim(S_n(\mathbb{R}) + F) \leq \dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$. Cela entraîne une contradiction. Ainsi, nous concluons que :

$$\dim(S_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0.$$

25. Soit F un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ tel que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$.

D'après la question précédente, nous avons $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$.

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F$. Puisque M est à la fois symétrique et nilpotent, il est diagonalisable. Comme M est nilpotent, son spectre est réduit à $\{0\}$, ce qui implique que $M = 0$. Ainsi, nous avons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F = \{0\}$, ce qui est une contradiction.

Nous en déduisons que tout sous-espace vectoriel F de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ doit vérifier $\dim(F) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Or, $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ et nous savons que $\dim(\mathcal{T}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ainsi, la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ est $\frac{n(n-1)}{2}$.

FIN DE L'ÉPREUVE