

## Exercice 1

### Préliminaire

1. (a) Soient  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

$$(X^2 - 1)(\lambda P + Q)' = \lambda(X^2 - 1)P' + (X^2 - 1)Q'$$

et en redérivant,

$$\varphi(\lambda P + Q) = ((X^2 - 1)(\lambda P + Q)')' = \lambda((X^2 - 1)P')' + ((X^2 - 1)Q')'$$

L'application  $\varphi$  est donc linéaire et ses espaces de départ et d'arrivée sont identiques. L'application  $\varphi$  est donc un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

- (b) On commence par remarquer que

— pour  $n = 0$ ,

$$\varphi(X^0) = \varphi(1) = 0.$$

— pour  $n = 1$ ,

$$\varphi(X) = (X^2 - 1)' = 2X.$$

Ensuite, si  $n > 1$ ,  $(X^n)' = nX^{n-1}$  et

$$\begin{aligned} \varphi(X^n) &= ((X^2 - 1)nX^{n-1})' = n(2X \cdot X^{n-1} + (X^2 - 1) \cdot (n-1)X^{n-2}) \\ &= 2nX^n + n(n-1)(X^n - X^{n-2}) \\ &= n(n+1)X^n - n(n-1)X^{n-2}. \end{aligned}$$

Dans tous les cas (les cas  $n = 0$  et  $n = 1$  annulant bien les termes de degré négatifs), on écrira

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(X^n) = n(n+1)X^n - n(n-1)X^{n-2}.$$

### Partie 1

2. On commence par développer  $U_1$  et  $U_2$  :

$$U_1(X) = X^2 - 1 \text{ et } U_2(X) = (X^2 - 1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$$

Donc

$$P_1(X) = U_1'(X) = 2X \text{ et } P_2(X) = U_2''(X) = 12X^2 - 4$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En développant le binôme de Newton (ou en utilisant le fait que  $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$  et donc par une récurrence immédiate que  $\deg(P^n) = n \cdot \deg(P)$ ), on en déduit que

$$\deg(U_n) = n \cdot \deg((X^2 - 1)) = 2n.$$

Ensuite, si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1, alors  $\deg(P') = \deg(P) - 1$ . Ceci implique que si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme de degré supérieur ou égal à  $n$ , alors  $\deg(P^{(n)}) = \deg(P) - n$ . Donc

$$\deg(P_n) = \deg(U_n) - n = n$$

(et ce résultat reste vrai pour  $n = 0$ ).

4. (a) On commence par remarquer que pour  $n = 0$ , l'égalité à montrer se ré-écrit  $0 = 0$  et est évidemment vraie. Ensuite, si  $n > 0$ ,

$$U_n'(X) = 2nX(X^2 - 1)^{n-1} \text{ donc } (X^2 - 1)U_n'(X) = 2nX(X^2 - 1)^n = 2nXU_n(X)$$

- (b) Si  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ , alors

$$(PQ)^{(p)}(X) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} P^{(k)}(X) Q^{(p-k)}(X).$$

(c) Dériver  $n + 1$  fois l'égalité de la question (a) et utiliser la formule de Leibniz nous donne :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (X^2 - 1)^{(k)} (U_n')^{(n+1-k)} &= 2n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (X)^{(k)} \cdot (U_n)^{(n+1-k)} \\ (X^2 - 1)U_n^{(n+2)} + 2(n+1)XU_n^{(n+1)} + (n+1)nU_n^{(n)} &= 2n \left( XU_n^{(n+1)} + (n+1)U_n^{(n)} \right) \\ (X^2 - 1)P_n'' + 2(n+1)XP_n' + n(n+1)P_n &= 2nXP_n' + 2n(n+1)P_n \\ (X^2 - 1)P_n'' + 2XP_n' &= n(n+1)P_n. \end{aligned}$$

Or,

$$\varphi(P_n) = ((X^2 - 1)P_n')' = (X^2 - 1)P_n'' + 2XP_n'.$$

Au final, on obtient bien le résultat demandé :  $\varphi(P_n) = n(n+1)P_n$ .

## Partie 2

5. D'après le préliminaire,

$$\forall k \leq N, \varphi(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2} \in \mathbb{R}_k[X] \subset \mathbb{R}_N[X].$$

Donc, par linéarité, si  $P \in \mathbb{R}_N[X]$ ,  $\varphi(P) \in \mathbb{R}_N[X]$ .

6. D'après la question précédente,  $M_N$  est la matrice d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}_N[X]$  qui est de dimension  $N + 1$ . Donc  $M_N \in \mathfrak{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ .

D'après le préliminaire,  $M_N$  est une matrice telle que (en numérotant les colonnes de 0 à  $N$ ),

- le coefficient diagonal de la colonne  $k$  vaut  $k(k+1)$ ,
- le coefficient deux lignes au dessus de cette colonne  $k$  vaut  $k(k-1)$  (quand il existe, donc au delà de la colonne numéro 1),
- les autres coefficients étant nuls.

On obtient :

$$M_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 0 & -6 & & & \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & 12 & & \ddots & \\ & & & & \ddots & & -N(N-1) \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & N(N+1) \end{pmatrix}$$

7. La matrice  $M_N$  est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux :

$$sp(M_N) = \{n(n+1), n \in \llbracket 0, N \rrbracket\}.$$

(cela se voit par exemple, en prenant le polynôme caractéristique de  $M_N$  qui est mis directement sous forme scindée). Ces valeurs propres de  $M_N$  étant toutes distinctes (puisque la suite  $(n(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante), la matrice  $M_N$  possède  $N + 1$  valeurs propres simples et est donc diagonalisable.

8. D'après la question 4.(c), le polynôme  $P_n$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $n(n+1)$  de l'endomorphisme  $\varphi$  (et de manière évidente de l'endomorphisme  $\varphi_N$ ). Ainsi, l'espace propre associé à la valeur propre  $n(n+1)$  est

$$E_{n(n+1)} = Vect(P_n).$$

9. On commence par remarquer qu'en induisant  $\varphi$  sur les différents sous-espaces  $\mathbb{R}_N[X]$ ,

$$sp(\varphi) \supset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} sp(\varphi_N) = \{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}.$$

Inversement,  $\lambda$  est une valeur propre de  $\varphi$ , alors il existe un polynôme non nul  $P$  tel que  $\varphi(P) = \lambda P$ . En notant  $N = \deg(P)$ ,  $\varphi(P) = \varphi_N(P) = \lambda P$ .

$$\lambda \in sp(\varphi_N) = \{n(n+1), n \in \llbracket 0, N \rrbracket\} \subset \{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}.$$

Donc  $sp(\varphi) \subset \{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$  et par double inclusion,

$$sp(\varphi) = \{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}.$$

## Partie 2

10. — L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est symétrique de manière évidente.

— Si  $(P_1, P_2, Q) \in \mathbb{R}[X]^3$  et si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \int_{-1}^1 (\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)dt = \lambda \int_{-1}^1 P_1(t)Q(t)dt + \int_{-1}^1 P_2(t)Q(t)dt = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle.$$

L'application est donc linéaire à gauche (elle l'est plus simplement par linéarité de l'intégrale) et par symétrie, elle est linéaire à droite. Elle est donc bilinéaire.

— Enfin, si  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq 0,$$

et si  $\langle P, P \rangle = 0$ , alors comme

—  $P^2$  est une fonction positive et continue (puisque c'est un polynôme),

— son intégrale sur  $[-1, 1]$  est nulle,

alors la fonction  $P^2$  (et donc  $P$ ) est nulle sur  $[-1, 1]$ . Le polynôme  $P$  possédant une infinité de racines (tout l'intervalle  $[-1, 1]$ ),  $P$  est le polynôme nul. L'application est donc définie positive.

Au final,  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$  est bilinéaire, symétrique, définie positive. C'est donc un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

11. (a) Soient  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ . Alors

$$\langle \varphi(P_n), P_m \rangle = \int_{-1}^1 \varphi(P_n)(t)P_m(t)dt$$

Effectuons une intégration par parties. Posons

$$\begin{cases} u(t) = P_m(t) \\ v'(t) = \varphi(P_n)(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = P'_m(t) \\ v(t) = (t^2 - 1)P'_n(t) \end{cases}$$

(on peut bien effectuer l'intégration par parties puisque  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ ). Donc

$$\begin{aligned} \langle \varphi(P_n), P_m \rangle &= [P_m(t) \cdot (t^2 - 1)P'_n(t)]_{t=-1}^1 - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'_n(t)P'_m(t)dt \\ &= - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'_n(t)P'_m(t)dt \\ &= - \int_{-1}^1 P'_n(t) \cdot (t^2 - 1)P'_m(t)dt \end{aligned}$$

Et en ré-effectuant une intégration par parties en posant cette fois

$$\begin{cases} u(t) = (t^2 - 1)P'_m(t) \\ v'(t) = P'_n(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = \varphi(P_m)(t) \\ v(t) = P_n(t) \end{cases}$$

(les fonctions  $u$  et  $v$  étant bien de classe  $\mathcal{C}^1$ ),

$$\begin{aligned} \langle \varphi(P_n), P_m \rangle &= - [P_n(t) \cdot (t^2 - 1)P'_m(t)]_{t=-1}^1 + \int_{-1}^1 P_n(t)\varphi(P_m)(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 P_n(t)\varphi(P_m)(t)dt \end{aligned}$$

Donc  $\langle \varphi(P_n), P_m \rangle = \langle P_n, \varphi(P_m) \rangle$ .

- (b) Or,  $\varphi(P_n) = n(n+1)P_n$  et  $\varphi(P_m) = m(m+1)P_m$ . L'égalité montrée à la question précédente devient donc par bilinéarité,

$$n(n+1)\langle P_n, P_m \rangle = m(m+1)\langle P_n, P_m \rangle.$$

Si  $m \neq n$ , alors  $m(m+1) \neq n(n+1)$ . Donc  $\langle P_n, P_m \rangle = 0$ .

12. (a) Par identité remarquable, la décomposition en produit de facteurs irréductibles de  $U_n$  est

$$U_n = (X-1)^n(X+1)^n$$

Donc  $U_n$  admet deux racines : 1 et -1 et ces racines sont de multiplicité  $n$ .

- (b) Tout d'abord,

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n(t)^2 dt = \int_{-1}^1 U_n^{(n)}(t) \cdot U_n^{(n)}(t) dt.$$

Montrons qu'au bout de  $k$  intégrations par parties,

$$\|P_n\|^2 = (-1)^k \int_{-1}^1 U_n^{(n-k)}(t) \cdot U_n^{(n+k)}(t) dt.$$

et ce, pour tout  $k$  entre 0 et  $n$ .

— Pour  $k = 0$ , on n'a pas touché à l'intégrale et l'égalité est vraie.

— Soit  $k \leq n-1$ . Supposons que la formule au rang  $k$  est vraie. Alors Effectuons une intégration par parties en posant

$$\begin{cases} u(t) = U_n^{(n+k)}(t) \\ v'(t) = U_n^{(n-k)}(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = U_n^{(n+k+1)}(t) \\ v(t) = U_n^{(n-k-1)}(t) \end{cases}$$

Alors,

$$U_n^{(n-k-1)}(1) = U_n^{(n-k-1)}(-1) = 0$$

puisque 1 et -1 sont des racines de multiplicité  $n$  de  $U_n$  et que  $n-1-k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Le terme tout intégré est donc nul et

$$\|P_n\|^2 = -(-1)^k \int_{-1}^1 U_n^{(n-k-1)}(t) \cdot U_n^{(n+k+1)}(t) dt = (-1)^{k+1} \int_{-1}^1 U_n^{(n-k-1)}(t) \cdot U_n^{(n+k+1)}(t) dt.$$

La formule est donc vraie au rang  $k+1$ .

On a donc montré que la formule était vraie de proche en proche pour  $k \leq n$ . Et pour  $k = n$ ,

$$\|P_n\|^2 = (-1)^n \int_{-1}^1 U_n(t) \cdot U_n^{(2n)}(t) dt = (-1)^n \langle U_n, U_n^{(2n)} \rangle.$$

- (c) Le binôme de Newton donne que  $U_n = X^{2n} + Q_n$  avec  $Q_n$  un polynôme de degré inférieur strict à  $2n$ .  
Donc

$$U_n^{(2n)} = (X^{2n})^{(2n)} + Q_n^{(2n)} = (X^{2n})^{(2n)} = (2n)!$$

- (d) On en déduit que

$$\|P_n\|^2 = (-1)^n (2n)! \langle U_n, 1 \rangle = (2n)! (-1)^n \int_{-1}^1 U_n(t) dt = (2n)! (-1)^n \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt.$$

D'après le résultat admis de l'énoncé,

$$\|P_n\|^2 = (2n)! \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = (2^n n!)^2 \frac{2}{2n+1} \quad \text{et donc} \quad \|P_n\| = 2^n n! \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

13. La famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est orthogonale pour le produit scalaire de l'énoncé (cf. question 11 (b)). C'est donc une famille libre de cardinal  $n+1$ , i.e. de cardinal égal à la dimension de  $\mathbb{R}_n[X]$ . C'est donc une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

La famille  $\left( \frac{P_0}{\|P_0\|}, \dots, \frac{P_n}{\|P_n\|} \right)$  est donc une base orthonormale de  $\mathbb{R}_n[X]$ . On répond donc à la question en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$Q_n = \frac{P_n}{\|P_n\|} = \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{2^n n!} P_n$$

## Exercice 2

### Partie 1

1. Soit  $k \leq n$ . On remarque que  $Y_k$  ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. C'est donc une loi de Bernoulli. Ensuite, on note  $p$  la probabilité pour que le joueur  $k$  parie sur l'équipe  $A$ . Alors

$$Y_k = 1 \Leftrightarrow "J_k \text{ parie sur } A \text{ et } A \text{ gagne}" \text{ OU } "J_k \text{ parie sur } B \text{ et } B \text{ gagne}."$$

Donc, ces événements étant incompatibles,

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}("J_k \text{ parie sur } A \text{ et } A \text{ gagne}") + \mathbb{P}("J_k \text{ parie sur } B \text{ et } B \text{ gagne}").$$

Puis par indépendance du résultat du match et du pari des joueurs,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_k = 1) &= \mathbb{P}("J_k \text{ parie sur } A")\mathbb{P}("A \text{ gagne}") + \mathbb{P}("J_k \text{ parie sur } B")\mathbb{P}("A \text{ gagne}") \\ &= p \cdot \frac{1}{2} + (1-p) \cdot \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(Y_k = 1) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La variable  $Y_k$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$  :  $\mathbb{P}(Y_k = 0) = \mathbb{P}(Y_k = 1) = \frac{1}{2}$ .

Par ailleurs, les paris étant indépendants et le résultat du match étant indépendant de ces paris, les variables  $(Y_k)_k$  sont mutuellement indépendantes. En effet, admettons ici (comme l'énoncé le sous-entend, sans le dire explicitement) que la probabilité  $p$  que chaque joueur parie sur l'une ou l'autre équipe soit de  $\frac{1}{2}$ .

Alors, prenons une sous famille  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$  et montrons que les événements  $(Y_{i_k} = 1)$  sont indépendants (la situation étant symétrique par rapport aux joueurs, on se place sans perdre de généralité dans le cas où  $i_k = k$ ). En notant

- $A$  l'événement "l'équipe  $A$  gagne",
- $A_k$  l'événement "le joueur  $k$  a misé sur l'équipe  $A$ ",

alors l'événement  $E = (Y_1 = 1 \cap \dots \cap Y_m = 1)$  s'écrit comme

$$E = (A \cap A_1 \cap \dots \cap A_m) \cup (\bar{A} \cap \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_m)$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1 = 1 \cap \dots \cap Y_m = 1) &= \mathbb{P}(A \cap A_1 \cap \dots \cap A_m) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_m) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_m) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}_1) \dots \mathbb{P}(\bar{A}_m) \text{ (par indépendance).} \\ &= \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^m} = \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(Y_k = 1). \end{aligned}$$

Les événements  $(Y_k = 1)_{k \leq n}$  sont donc mutuellement indépendants. Ensuite, pour  $(y_k)_{1 \leq k \leq n} \in \{0, 1\}^n$  quelconque, (en considérant les complémentaires de ces événements pour  $y_k = 0$ ), on en déduit que les événements  $(Y_k = y_k)_{k \leq n}$  sont mutuellement indépendants. Au final, les variables aléatoires  $Y_k$  sont mutuellement indépendantes.

La variable  $N$  est donc une somme de variables indépendantes de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ . La variable  $N$  suit donc une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ , soit :

$$N(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

---

1. Ce qui n'est pas évident juste à partir des données de l'énoncé. Supposons une situation où  $J_1$  ait une connaissance jouant dans l'équipe  $A$ . Il aura donc inconsciemment plus de chances de miser sur l'équipe  $A$ . Ceci ne contredit pas les hypothèses de l'énoncé puisque cela ne change pas le résultat du match, ne le truque pas et ne dépend pas du choix des autres parieurs. Il aurait été heureux de rajouter dans l'énoncé une phrase du type : "Chaque joueur n'a aucune préférence particulière pour l'une des deux équipes."

2. De deux choses l'une :

- soit il n'y a pas de gagnant et aucun des joueurs ne gagne d'argent. Dans ce cas  $S = 0$ ,
- soit il y a au moins un gagnant et les  $m$  gagnants se partagent les  $n$  euros. La somme totale gagnée est donc de  $n$  euros et dans ce cas  $S = n$ .

Donc  $S(\Omega) = \{0, n\}$ .

Par ailleurs,

$$S = 0 \Leftrightarrow N = 0 \text{ donc } \mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(N = 0) = \frac{1}{2^n}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(S = n) = 1 - \frac{1}{2^n} \text{ et } \mathbb{E}(S) = n\mathbb{P}(S = n) = n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

3. Par symétrie du problème, les  $X_k$  suivent tous la même loi et ont donc la même espérance. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) \text{ (par linéarité de l'espérance)} \\ &= n\mathbb{E}(X_k). \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(S) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

4. On demande en fait de comparer les situations à  $n$  joueurs et à  $n + 1$  joueurs, et plus précisément  $E_n$ , l'espérance de gain quand il y a  $n$  parieurs et  $E_{n+1}$ , celle quand il y en a  $n + 1$ . À  $n + 1$  joueurs, l'espérance de gain de chaque joueur est donné par

$$E_{n+1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} > 1 - \frac{1}{2^n} = E_n$$

Le groupe a donc intérêt à rajouter un  $n + 1$ ème parieur<sup>2</sup>.

## Partie 2

5.  $X_k = 0$  si et seulement si le joueur  $k$  perd si et seulement si  $Y_k = 0$ . Donc

$$\mathbb{P}(X_k = 0) = \mathbb{P}(Y_k = 0) = \frac{1}{2}.$$

6. (a) Si on sait que l'événement  $(Y_k = 1)$  se produit, la variable  $N - 1$  représente le nombre de gagnants parmi les  $n - 1$  joueurs restants. Ainsi,  $N - 1$  (conditionnellement au fait que  $Y_k = 1$  est vérifiée suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n - 1, \frac{1}{2})$ .

(b) Le joueur  $k$  gagne  $\frac{n}{i}$  euros si et seulement s'il gagne ( $Y_k = 1$ ) et s'il y a  $i$  gagnants ( $N = i$ ). Donc

$$\mathbb{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \mathbb{P}(Y_k = 1 \cap N = i) = \mathbb{P}_{(Y_k=1)}(N = i) \mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}_{(Y_k=1)}(N - 1 = i - 1) \cdot \frac{1}{2}.$$

Or, la loi conditionnelle de  $N - 1$  sachant que  $(Y_k = 1)$  est une loi binomiale  $\mathcal{B}(n - 1, \frac{1}{2})$ . Donc

$$\mathbb{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \binom{n-1}{i-1} \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} = \binom{n-1}{i-1} \frac{1}{2^n}.$$

7. D'après la définition de  $X_k$ ,

$$X_k(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n}{i}, i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}.$$

---

2. Ce qui est cohérent, puisque la probabilité de chaque joueur de gagner est toujours de  $\frac{1}{2}$  mais que le pot commun augmente de 1 euro.

La formule de l'espérance donne alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_k) &= \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \mathbb{P}\left(X_n = \frac{n}{i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \binom{n-1}{i-1} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} = \frac{1}{2^n} (2^n - 1).\end{aligned}$$

On retrouve que  $\mathbb{E}(X_k) = 1 - \frac{1}{2^n}$ .

8. Considérons les événements  $X_j = n$  et  $X_k = n$ . Alors ces événements sont incompatibles puisque pour que  $X_j = n$ , il faut qu'il n'y ait qu'un seul gagnant (qui est donc  $j$ ) et pour que  $X_k = n$ , le seul gagnant doit être  $k$ . Donc

$$\mathbb{P}(X_j = n \cap X_k = n) = 0 \text{ mais } \mathbb{P}(X_j = n)\mathbb{P}(X_k = n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \neq 0.$$

Ces événements ne sont donc pas indépendants et les variables aléatoires  $X_k$  et  $X_l$  ne sont pas indépendantes.

### Partie 3

9. (a) Si l'événement  $(S = 0)$  est vérifié alors il y a 0 euros à se partager et  $T = 0$  avec probabilité 1. Si l'événement  $(S = n)$  est vérifié alors on est dans le même cas de figure qu'en partie 1,  $T = 0$  si et seulement si tous les joueurs perdent. Ainsi,

$$\mathbb{P}_{(S=0)}(T = 0) = 1 \text{ et } \mathbb{P}_{(S=n)}(T = 0) = \frac{1}{2^n}$$

- (b) Donc, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(T = 0) = \mathbb{P}_{(S=0)}(T = 0)\mathbb{P}(S = 0) + \mathbb{P}_{(S=n)}(T = 0)\mathbb{P}(S = n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Comme à la question 2,  $T$  prend forcément ses valeurs dans  $\{0, n\}$ . Donc

$$\mathbb{P}(T = n) = 1 - \frac{1}{2^n} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2^n} + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2.$$

- (c) Ainsi,

$$\mathbb{E}(T) = n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 \text{ et } \mathbb{E}(T^2) = n^2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2$$

Donc

$$\mathbb{E}(T) = n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 \text{ et } \text{Var}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = n^2 \left( \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^4 \right).$$

Donc

$$\text{Var}(T) = n^2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 \left( \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4^n} \right) = \frac{n^2}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

- (d) Par définition,  $\text{Cov}(S, T) = \mathbb{E}(ST) - \mathbb{E}(S)\mathbb{E}(T)$ . Or,  $ST \in \{0, n^2\}$ , puisque  $(S, T) \in \{0, n\}^2$ . Donc

$$\mathbb{E}(ST) = n^2 \mathbb{P}(ST = n^2) = n^2 \mathbb{P}(S = n \cap T = n) = n^2 \mathbb{P}_{(S=n)}(T = n) \mathbb{P}(S = n)$$

Or,

$$\mathbb{P}_{(S=n)}(T = n) = 1 - \mathbb{P}_{(S=n)}(T = 0) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Donc

$$\text{Cov}(S, T) = n^2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 - n^2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^3 = \frac{n^2}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2$$

10. Comme à la question 3, les  $Z_k$  suivent la même loi. Donc par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(T) = n\mathbb{E}(Z_k) \text{ donc } \mathbb{E}(Z_k) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(T) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2$$

11.  $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 < 1 - \frac{1}{2^n}$ . Donc  $\mathbb{E}(Z_k) < \mathbb{E}(X_k)$ , i.e. l'espérance du gain au 2<sup>e</sup> match est plus faible. Le joueur  $k$  n'a donc pas intérêt à parier au deuxième match.

#### Partie 4

12. (a) Le support de  $U$  est  $\llbracket 0, n \rrbracket$  : si  $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$  joueurs ont gagné à la première manche, ils mettent chacun 1 euro et  $U = m$  (et sinon,  $U = 0$ ).

(b) Supposons que  $N = i \neq 0$ , alors  $i$  joueurs donnent chacun 1 euro et  $U = 0$  (si personne ne gagne) ou  $U = i$ . Donc si  $i \neq j$ ,

$$\mathbb{P}_{(N=i)}(U = j) = 0.$$

Sinon, le même raisonnement que la question 2 donne :

$$\mathbb{P}_{(N=i)}(U = i) = 1 - \frac{1}{2^i}$$

(c) Donc par formule des probabilités totales, si  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(U = i) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{(N=k)}(U = i) \mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}_{(N=i)}(U = i) \mathbb{P}(N = i) = \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) \binom{n}{i} \frac{1}{2^n}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = 0) &= 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(U = i) = 1 - \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) \binom{n}{i} \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} + \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \binom{n}{i} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \binom{n}{i} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \binom{n}{i} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

On en déduit l'espérance de  $U$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= \sum_{i=1}^n i \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) \binom{n}{i} \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{i=1}^n n \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) \binom{n-1}{i-1} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{n}{2^n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right) \binom{n-1}{i} = \frac{n}{2^n} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \binom{n-1}{i} \right) \\ &= \frac{n}{2^n} \left( 2^{n-1} - \frac{3^{n-1}}{2^n} \right) = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \right). \end{aligned}$$

13. Le même raisonnement qu'en questions 3 et 10 donne que  $\mathbb{E}(W_k) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(U)$ . Donc

$$\mathbb{E}(W_k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

14. L'espérance de gain pour une mise de 1 étant strictement inférieure à  $\frac{1}{2}$  et la probabilité de gagner étant  $\frac{1}{2}$ , le joueur  $k$  n'a pas intérêt à parier sur ce deuxième match.