

Banque PT 2025 : Epreuve de Mathématiques B

Premier exercice.

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$2xy\sqrt{3} - 2y^2 = 3$$

- 1) Ecrire la matrice Q associée à l'équation de la conique $\mathcal{C}$.

On obtient : $Q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$ qui est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

- 2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q .

On calcule le polynôme caractéristique pour déterminer exactement les valeurs propres de Q . On obtient : $\chi_Q(X) = \begin{vmatrix} X & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & X+2 \end{vmatrix} = X(X+2) - 3 = X^2 + 2X - 3$. Polynôme dont 1 et -3 sont racines évidentes

Donc $\chi_Q(X) = (X-1)(X+3)$. χ_Q est scindé à racines simples ce qui corrobore que la matrice Q est bien diagonalisable et $\text{Sp}\{Q\} = \{1; -3\}$. Q est donc semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de vecteurs propres d'après le théorème spectral.

- Valeur propre 1 : on appelle E_1 le sous espace propre associé à la valeur propre 1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}y = x \\ \sqrt{3}x - 2y = y \end{cases} \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y = 0 \text{ donc } E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

- Valeur propre -3 : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}y = -3x \\ \sqrt{3}x - 2y = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3}x + y = 0 \text{ donc } E_{-3} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\}$

- 3) Donner une équation réduite de $\mathcal{C}$ ainsi qu'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}'$ dans lequel cette équation est obtenue.

On pose $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_{-3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

La famille $\{\vec{u}_1; \vec{u}_{-3}\}$ est une base orthonormée de vecteurs propres de Q .

Dans une telle base, une équation réduite de $\mathcal{C}$ est donc donnée par :

$$(x'; y') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow x'^2 - 3y'^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{3} - y'^2 = 1$$

Ainsi dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}_1; \vec{u}_{-3})$ l'équation réduite de $\mathcal{C}$ est $\frac{x'^2}{3} - y'^2 = 1$

4) Donner la nature de $\mathcal{C}$

L'équation réduite de $\mathcal{C}$ fournie à la question précédente est caractéristique d'une hyperbole.

5) Déterminer les principaux éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$ (centre éventuel, sommets, asymptotes éventuelles). Les coordonnées des points et les équations des éventuelles asymptotes seront données dans le repère $\mathcal{R}'$ puis dans le repère $\mathcal{R}$

- *Centre, asymptotes et sommets dans le repère $\mathcal{R}'$:*

$\frac{x'^2}{3} - y'^2 = 1$ est l'équation réduite d'une hyperbole centrée à l'origine $(0;0)$ du repère $\mathcal{R}'(O; \overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_{-3}})$.

Les asymptotes données par $x'^2 - 3y'^2 = 0$ donc $\begin{cases} x' - \sqrt{3}y' = 0 \\ x' + \sqrt{3}y' = 0 \end{cases}$ dans le repère $\mathcal{R}'(O; \overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_{-3}})$.

Rappelons que si l'équation de l'hyperbole s'écrit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ alors les deux sommets ont pour coordonnées $S_1(-a; 0)$ et $S_2(+a; 0)$.

Donc ici, dans $\mathcal{R}'$, la conique $\mathcal{C}$ a pour sommets $S_1(-\sqrt{3}; 0)$ et $S_2(+\sqrt{3}; 0)$ portés par l'axe $(O; \overrightarrow{u_1})$.

- *Centre, asymptotes et sommets dans le repère $\mathcal{R}$*

Le centre $O'(0;0)$ dans le repère $\mathcal{R}'(O; \overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_{-3}})$ demeure $O(0;0)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

La matrice de passage de la base canonique vers la base orthonormée $\{\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_{-3}}\}$ s'écrit

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Dans le repère $\mathcal{R}$, les deux sommets vérifient respectivement :

$$\overrightarrow{OS_1} = P \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Et, par symétrie par rapport à l'origine du repère :

$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Or, l'équation de la première asymptote s'écrit : $x' - \sqrt{3}y' = 0$ autrement dit :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}y' \\ y' = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = y' \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

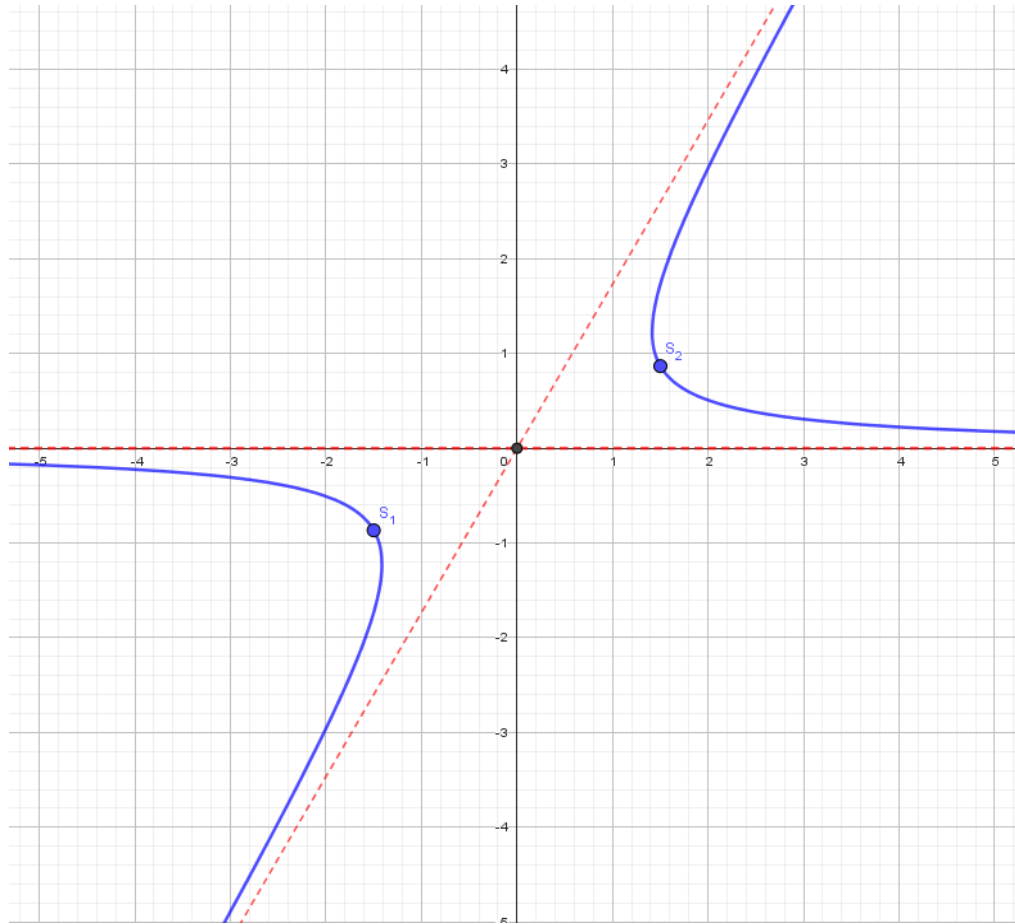
Et la deuxième asymptote s'écrit $x' + \sqrt{3}y' = 0$ autrement dit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = y' \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule $P \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc la première asymptote est l'axe des abscisses dans le repère $\mathcal{R}$

et $P \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ donc la deuxième asymptote a pour équation $y = \sqrt{3}x$ dans le repère $\mathcal{R}$

- 6) Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sur la feuille de papier millimétrée fournie. On mettra en évidence le repère $\mathcal{R}'$ ainsi que les éléments déterminés dans la question 5. Unité : 2 cm.



Deuxième exercice.

L'objectif de cet exercice est de résoudre sur $]1; +\infty[$, l'équation différentielle

$$(3x + 1)y + (2 - x)y' - \frac{x}{2}(3x^2 + 2x - 2)y'' = 3(x^2 + x + 1) \quad (E)$$

On note (E_H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$(3x + 1)y + (2 - x)y' - \frac{x}{2}(3x^2 + 2x - 2)y'' = 0 \quad (H)$$

On désigne par S l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $]1; +\infty[$ et par S_H l'ensemble des solutions réelles de (E_H) sur $]1; +\infty[$.

Partie I

- 1) Démontrer que $\forall x \in]1; +\infty[, 3x^2 + 2x - 2 \neq 0$.

Le discriminant du trinôme du second degré vaut : $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 28 > 0$ donc l'équation $3x^2 + 2x - 2 = 0$ possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-2-2\sqrt{7}}{6} = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$. Or $\sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$ donc $\frac{-1+\sqrt{7}}{3} < 1$

En outre ce trinôme du second degré est l'équation d'une parabole orientée vers l'infini positif puisque son coefficient directeur est $3 > 0$ d'où $\boxed{\forall x \in]1; +\infty[, 3x^2 + 2x - 2 > 0}$

Remarque : on peut aussi tout simplement constater que si $x > 1$ alors $2x - 2 > 0$ et que $3x^2 > 3$

Ainsi $3x^2 + 2x - 2 > 3 > 0$ ce qui répond à la question...

- 2) Démontrer que S_H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble D_2 des fonctions deux fois dérivables sur $]1; +\infty[$.

La fonction nulle appartient à S_H donc $S_H \neq \emptyset$. La dérivation étant un opérateur linéaire, S_H est stable par combinaison linéaire. Ainsi que S_H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble D_2 des fonctions deux fois dérivables sur $]1; +\infty[$.

- 3) Donner, sans démonstration, la dimension de S_H .

Etant donné que $3x^2 + 2x - 2 \neq 0$ sur $]1; +\infty[$, l'équation (E_H) est une équation différentielle homogène de degré exactement 2 dont l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension deux.

- 4) Démontrer que la fonction f_1 définie sur $]1; +\infty[$ par $\forall x \in]1; +\infty[, f_1(x) = \frac{1}{x}$ est solution de (E_H) sur $]1; +\infty[$.

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'_1(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ et } f''_1(x) = \frac{2}{x^3}$$

Ainsi

$$\forall x > 1, (3x + 1)\frac{1}{x} - (2 - x)\frac{1}{x^2} - \frac{x}{2}(3x^2 + 2x - 2)\frac{2}{x^3} = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - 3 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

Donc f_1 est solution de (E_H) sur $]1; +\infty[$

Partie II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique.

- 5) La matrice A est-elle inversible?

On calcule le déterminant de la matrice A en développant par rapport à la première colonne et on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times (-18) - 3 \times (-6) = 0$$

Donc la matrice A n'est pas inversible.

6) Déterminer le noyau de A .

On peut remarquer qu'on obtient le vecteur nul en prenant deux fois la première colonne et en lui soustrayant la somme des deux autres colonnes ainsi le vecteur $2e_1 - (e_2 + e_3) \in \text{Ker } A$

Sinon on résout :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 6z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\text{Ker } A$ apparaît ainsi comme une droite vectorielle (on aurait aussi pu dire comme l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^3 \dots$).

7) Démontrer que l'image de A est le plan d'équation $3x = y + 2z$.

$\text{Ker } A$ étant une droite vectorielle, le théorème du rang permet d'affirmer que $\text{Im } A$ est un plan vectoriel. Les deux premières colonnes de la matrice A n'étant pas proportionnelles, elles forment une famille libre

de $\mathbb{R}^3$ et une base de $\text{Im } A$. Ainsi $\text{Im } A = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. On en déduit que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Im } A \Leftrightarrow \exists (a; b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = a + 2b \\ y = 3a \\ z = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \exists (a; b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = a + 2b \\ y/3 = a \\ z/3 = b \end{cases}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Im } A \Leftrightarrow x = \frac{y}{3} + 2\frac{z}{3} \Leftrightarrow 3x = y + 2z$$

8) Sans résoudre les systèmes, déterminer à l'aide des questions précédentes quel est le nombre de solutions (éventuellement infini) de :

$$\mathcal{S}_1: AX = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{S}_2: AX = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $3 \times 3 \neq (-1) + 4$ donc $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \text{Im } A$ ainsi, l'équation $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$ donc $\mathcal{S}_1 = \emptyset$

De la même façon on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im } A$ ainsi l'équation $AX = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet au moins une solution, à laquelle on peut toujours ajouter un vecteur de $\text{Ker } A = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$: on obtient ainsi une infinité de solutions pour $\mathcal{S}_2$

9) Résoudre le système $\mathcal{S}_2: AX = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6z = 3 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = 1 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{S}_2$ est la droite vectorielle $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$ où on remarque que $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A$.

Partie III

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 est noté $\mathbb{R}_2[X]$ et sa base canonique est $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \varphi(P) = (3X + 1)P + (2 - X)P' - \frac{X}{2}(3X^2 + 2X - 2)P''$$

10) Calculer $\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)$.

On calcule : $\varphi(1) = 3X + 1$ puis $\varphi(X) = (3X + 1)X + 2 - X = 3X^2 + 2$ et

$$\begin{aligned} \varphi(X^2) &= (3X + 1)X^2 + 2(2 - X)X - 2\frac{X}{2}(3X^2 + 2X - 2) \\ \varphi(X^2) &= 3X^3 + X^2 + 4X - 2X^2 - 3X^3 - 2X^2 + 2X = -3X^2 + 6X \end{aligned}$$

11) Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

La dérivation étant un opérateur linéaire donc l'application φ est elle-même linéaire.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $\exists (a; b; c) \in \mathbb{R}^3, P(X) = aX^2 + bX + c$

De la question précédente on déduit que les images par l'application linéaire φ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont toutes des polynômes de degré inférieur à deux et qu'il en est de même de toutes leurs combinaisons linéaires. Donc l'application φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

12) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

On obtient

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = A$$

13) En déduire, sans calcul, le noyau de φ ainsi qu'une solution de l'équation

$$\varphi(P) = 3(X^2 + X + 1)$$

D'après les résultats de la **Partie II** on obtient $\text{Ker } \varphi = \text{Vect} \{-2 + X + X^2\}$

En remarquant que le polynôme $X^2 + X + 1$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(P) = 3(X^2 + X + 1)$ est :

$$\{1 + X + z(-2 + X + X^2), z \in \mathbb{R}\}$$

Partie IV

14) Déterminer S_H puis S .

D'après la **Partie I**, la fonction f_1 définie sur $]1; +\infty[$ par $\forall x \in]1; +\infty[, f_1(x) = \frac{1}{x}$ est solution de (E_H) sur $]1; +\infty[$. Donc $f_1 \in S_H$

D'après la **Partie III**, la fonction f_2 définie sur $]1; +\infty[$ par $\forall x \in]1; +\infty[, f_2(x) = -2 + x + x^2$ est solution de (E_H) sur $]1; +\infty[$. Donc $f_2 \in S_H$

La famille $\{f_1; f_2\}$ est clairement une famille libre de l'ensemble D_2 des fonctions deux fois dérivables sur $]1; +\infty[$. Comme S_H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble D_2 des fonctions deux fois dérivables sur $]1; +\infty[$, on en déduit que $S_H = \text{Vect}\{f_1; f_2\}$.

De plus, la fonction f_3 définie sur $]1; +\infty[$ par $\forall x \in]1; +\infty[, f_3(x) = 1 + x$ vérifie $\varphi(f_3) = 3(x^2 + x + 1)$ et représente donc une solution particulière de l'équation (E) sur $]1; +\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $]1; +\infty[$ est alors fourni par $\boxed{f = f_3 + af_1 + bf_2; (a; b) \in \mathbb{R}^2}$

Troisième exercice.

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I

On considère la surface S d'équation cartésienne : $x^2 = 2yz$.

On note Γ la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \end{cases}, t \in]0; \frac{\pi}{2}[$$

De plus, $M(t)$ désigne le point de Γ de paramètre t .

Enfin, P_a est le plan d'équation $z = a$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\Gamma_a = S \cap P_a$.

1) (a) Justifier que le plan d'équation $x = 0$ est un plan de symétrie de la surface S .

Si $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$ alors $N \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$ puisque $x^2 = (-x)^2 = 2yz$ donc la surface $\boxed{S \text{ est symétrique par rapport au plan d'équation } x = 0}$

(b) Déterminer les points non réguliers de S .

La fonction $f: (x, y, z) \mapsto x^2 - 2yz$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ puisque polynomiale. Les points non réguliers de la surface S sont caractérisés par $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$

$$\text{Or } \overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2z \\ -2y \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0} \Leftrightarrow x = -y = -z = 0 \text{ et } \boxed{O = (0; 0; 0) \text{ est le seul point}}$$

non régulier de la surface S

(c) Déterminer une équation du plan tangent à S au point A de coordonnées $(2, -2, -1)$ après avoir vérifié que $A \in S$.

$A \in S$ puisque $-2 \times (-2) \times (-1) = 4 = 2^2$. De plus, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(A)$ est normal au plan tangent à la surface S en A et $\overrightarrow{\text{grad}} f(A) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Le plan P_A tangent à S en A a donc pour équation cartésienne :

$$P_A: 4(x - x_A) + 2(y - y_A) + 4(z - z_A) = 0$$

Soit $\boxed{P_A: 2x + 1y + 2z = 0}$

(d) Démontrer que l'ensemble des points (réguliers) de S en lesquels le plan tangent à S est parallèle au plan d'équation $2\sqrt{3}x + 2y + 3z = 0$ est une droite privée de O dont, on donnera un vecteur directeur.

Le plan d'équation $2\sqrt{3}x + 2y + 3z = 0$ admet $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Un plan tangent à

S en un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$ est parallèle au plan d'équation $2\sqrt{3}x + 2y + 3z = 0$ si et seulement si

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) \text{ est colinéaire à } \vec{n}, \text{ donc, si et seulement si } \exists a \in \mathbb{R}^*, \begin{pmatrix} 2x \\ -2z \\ -2y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\sqrt{3} \\ z = -a \\ y = -\frac{3}{2}a \end{cases}, \text{ ce}$$

qui constitue bien la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ passant par O mais privée du point O

Réciproquement vérifions que tous les points de cet ensemble sont bien des points de S . En effet :

$$2 \times (-a) \times \left(-\frac{3}{2}a\right) = 3a^2 = (a\sqrt{3})^2$$

En conclusion :

Tous les points $\begin{pmatrix} a\sqrt{3} \\ -\frac{3}{2}a \\ -a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ admettent un plan tangent parallèle au plan $2\sqrt{3}x + 2y + 3z = 0$

(e) Existe-t-il un point régulier de S en lequel le plan tangent à S est orthogonal au vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$?

Il faut maintenant chercher s'il existe un point régulier $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$ soit colinéaire au

vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On résout $\begin{pmatrix} 2x \\ -2z \\ -2y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = -\frac{a}{2} \\ z = -\frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Réciproquement, reste à vérifier si ces points appartiennent bien à S : $2 \times \left(-\frac{a}{2}\right) \times \left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{2} \neq \left(\frac{a}{2}\right)^2$ pour $a \neq 0$

Il n'existe donc pas de point régulier de S dont le plan tangent est orthogonal au vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

2) Démontrer que la courbe Γ est régulière.

On pose :

$$\forall t \in]0; \frac{\pi}{2}[, M(t) = \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \end{cases}$$

On a :

$$\forall t \in]0; \frac{\pi}{2}[, M'(t) = \begin{cases} x'(t) = -\sqrt{2} \sin(t) \\ y'(t) = \cos(t) \\ z'(t) = -\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} - \cos(t) = -\cos(t) \left(1 + \frac{1}{\sin^2(t)}\right) \end{cases}$$

Comme il n'existe aucune valeur de $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$ qui annule le sinus on en déduit que pour tout point $M \in \Gamma$, $M'(t) \neq \vec{0}$. Donc **Γ est régulière**.

3) Vérifier que $\Gamma \subset S$.

On calcule

$$2 \sin(t) \left(\frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \right) = 2(1 - \sin^2(t)) = 2 \cos^2(t) = (\sqrt{2} \cos(t))^2$$

Donc **$\Gamma \subset S$**

4) Soit $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

a) Pour quelle valeur de a (dépendante de t), a-t-on $M(t) \in \Gamma_a$?

Dans la suite de cette question, a prend cette valeur.

P_a est le plan d'équation $z = a$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\Gamma_a = S \cap P_a$ donc Γ_a représente la *ligne de niveau de la surface S d'altitude $z = a$* (il s'agit, ici, en particulier, d'une parabole d'équation cartésienne $x^2 = 2ay$)

$$M(t) \in \Gamma_a \Leftrightarrow \exists t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, z(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) = a(t)$$

On sait que $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, z'(t) = -\cos(t) \left(1 + \frac{1}{\sin^2(t)}\right) < 0$ donc la fonction z est continue et strictement décroissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. De plus $\lim_{t \rightarrow 0^+} z(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} z(t) = 0$ donc $z\left(\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0; +\infty[$ et la fonction z réalise donc une bijection de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $]0; +\infty[$. Ainsi, pour tout $a > 0$ on pourra trouver une ligne de niveau de S d'altitude a .

b) Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}(t)$ de la tangente à Γ en $M(t)$.

Un vecteur $\vec{v}(t)$ de la tangente à Γ en $M(t)$ est

$$\vec{v}(t) = M'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t) \left(1 + \frac{1}{\sin^2(t)}\right) \end{pmatrix}$$

c) Vérifier que $M(t)$ est un point régulier de Γ_a et déterminer un vecteur $\vec{u}(t)$ directeur de la tangente à Γ_a en $M(t)$.

Au passage on remarquera au passage que $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est un point régulier de $\Gamma_a = S \cap P_a$ ($a > 0$) si et seulement si les plans tangents respectifs aux surfaces S et P_a sont distincts.

P_a étant un plan, il est tangent à lui-même en chacun de ses points et de vecteur normal $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{\text{grad}} f =$

$$2 \begin{pmatrix} x(t) \\ -z(t) \\ -y(t) \end{pmatrix} \text{ au point } M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in S$$

Ces deux vecteurs ne sont jamais colinéaires puisque l'abscisse $x(t)$ n'est jamais nulle pour $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ (ou leur produit vectoriel n'est jamais nul aussi puisque $a > 0$).

Pour déterminer un vecteur $\vec{u}(t)$ directeur de la tangente à Γ_a en $M(t)$ on effectue le produit vectoriel

$$\vec{u}(t) = \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x(t) \\ -z(t) \\ -y(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} z(t) \\ x(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autre méthode : on remarque justement que la ligne de niveau d'altitude $z = a$ est une parabole d'équation $x^2 = 2ay$. On pose $\varphi(x; y) = x^2 - 2ay$. Un vecteur normal à cette courbe au point considéré est le vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ -a \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x(t) \\ -z(t) \end{pmatrix}$$

Pour obtenir un vecteur tangent à la courbe il suffit de considérer un vecteur orthogonal au précédent dans le plan horizontal $z = 0$ (parallèle au plan $z = a$) en prenant, par exemple le vecteur $-2 \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} z(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$. En relevant le vecteur précédent en rajoutant une troisième coordonnée nulle on retrouve bien un résultat colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} z(t) \\ x(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ précédent.

d) Démontrer que $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux.

On calcule

$$\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = -2 \begin{pmatrix} z(t) \\ x(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t) \left(1 + \frac{1}{\sin^2(t)}\right) \end{pmatrix} = \sqrt{2} \sin(t) z(t) - x(t) \cos(t)$$

Donc

$$\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = \sqrt{2} \sin(t) \left(\frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \right) - \sqrt{2} \cos^2(t) = 0$$

Donc $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux.

Partie II

On considère une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

On suppose que : $\forall t \in I, (f(t), g(t)) \in U$ et $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(f(t), g(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(f(t), g(t)) \right) \neq (0, 0)$.

On note Σ la surface d'équation cartésienne $z = \varphi(x, y)$ et Γ la courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in I \text{ où } \Phi(t) = \varphi(f(t), g(t)) \\ z = \Phi(t) \end{cases}$$

On note $M(t)$ le point de Γ de paramètre t et on suppose f, g et φ choisies telles que la courbe Γ soit régulière. Enfin, on admet que $\Gamma \subset \Sigma$.

5) Soit $t \in I$ fixé. On note P_t le plan d'équation $z = \Phi(t)$ et $\Lambda_t = \Sigma \cap P_t$.

a) On considère un point régulier A de Λ_t de coordonnées (x_0, y_0, z_0) . Déterminer un vecteur tangent à Λ_t au point A .

La courbe $\Lambda_t = \Sigma \cap P_t$ représente la ligne de niveau de la surface Σ d'altitude $z = z_0 (= \Phi(t_0))$

On définit la fonction $F: (x, y, z) \mapsto z - \varphi(x, y)$. La surface Σ est alors définie par $F(x, y, z) = 0$.

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U donc la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \times \mathbb{R}$ et son gradient en un point $M(x, y, z)$ vaut

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un vecteur normal au plan P_t est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc un vecteur tangent à Λ_t au point A est donné par

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(A) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0; y_0) \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0; y_0) \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0; y_0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0; y_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) En déduire un vecteur tangent $\vec{u}(t)$ à Λ_t au point $M(t)$.

De façon analogue à la question précédente on obtient :

$$\vec{u}(t) = \overrightarrow{\text{grad}} F(M(t)) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t); y(t)) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t); y(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Déterminer un vecteur tangent $\vec{v}(t)$ à Γ au point $M(t)$. On donnera son expression d'abord à l'aide des fonctions f, g et Φ puis à l'aide des fonctions f, g et φ .

Par définition un vecteur tangent $\vec{v}(t)$ à Γ au point $M(t)$ est donné par $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ \Phi'(t) \end{pmatrix}$

La formule de dérivation dite « règle de la chaîne » permet d'écrire que

$$\Phi'(t) = f'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(f(t); g(t)) + g'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(f(t); g(t))$$

Donc

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ f'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(f(t); g(t)) + g'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(f(t); g(t)) \end{pmatrix}$$

d) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux si et seulement si la relation suivante, notée $(\mathcal{R})$ est vérifiée :

$$f'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(f(t), g(t)) - g'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(f(t), g(t)) = 0 \quad (R)$$

$\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t); y(t)) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t); y(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ f'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(f(t); g(t)) + g'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(f(t); g(t)) \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui permet directement d'obtenir :

$\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux si et seulement si

$$-f'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t); y(t)) + g'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t); y(t)) = 0$$

Ce qui est équivalent la relation notée ($\mathcal{R}$) par l'énoncé.

Dans la suite de cette partie, on pose $U = \mathbb{R}^2$ et φ est la fonction $(x, y) \mapsto h(x^2 + y^2)$ où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$. On suppose de plus que g ne s'annule pas sur I .

On note Q_α le plan d'équation $z = \alpha$ et $\Lambda'_\alpha = \Sigma \cap Q_\alpha$.

6)

a) Justifier que la fonction h est strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$.

Par hypothèse, h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$. Donc h' , la dérivée de h , garde un signe constant sur $\mathbb{R}^+$ sans jamais s'annuler.

Ce qui entraîne que h est strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$.

b) Justifier que pour tout $\alpha \in h(\mathbb{R}^+)$, il existe un unique $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $h(t_0) = \alpha$.
Qu'en est-il si $\alpha \notin h(\mathbb{R}^+)$?

h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$, donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $h(\mathbb{R}^+)$.

Donc pour tout $\alpha \in h(\mathbb{R}^+)$, l'équation $h(t) = \alpha$ admet une unique solution t_0 sur $\mathbb{R}^+$.

Si $\alpha \notin h(\mathbb{R}^+)$ alors l'existence de t_0 n'est pas garantie.

c) En déduire que pour tout $\alpha \in h(\mathbb{R}^+)$, Λ'_α est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Qu'en est-il si $\alpha \notin h(\mathbb{R}^+)$?

Soit $\alpha \in h(\mathbb{R}^+)$. Alors, d'après la question précédente, il existe un unique $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $h(t_0) = \alpha$

On a $\Lambda'_\alpha = \Sigma \cap Q_\alpha$ et $z = \varphi(x, y) = h(x^2 + y^2) = \alpha$. Ainsi :

$$\Lambda'_\alpha = \Sigma \cap Q_\alpha = \{(x, y, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times h(\mathbb{R}^+), h(x^2 + y^2) = \alpha\}$$

Donc :

$$\Lambda'_\alpha = \Sigma \cap Q_\alpha = \{(x, y, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times h(\mathbb{R}^+), h(x^2 + y^2) = h(t_0)\}$$

Or h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $h(\mathbb{R}^+)$ donc

$$\Lambda'_\alpha = \Sigma \cap Q_\alpha = \{(x, y, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times h(\mathbb{R}^+), x^2 + y^2 = t_0\}$$

Ce qui est bien l'équation cartésienne d'un cercle de centre $(0; 0; \alpha)$ de rayon $\sqrt{t_0}$

Si $\alpha \notin h(\mathbb{R}^+)$ alors $\Sigma \cap Q_\alpha = \emptyset$

d) Justifier que Σ est une surface de révolution dont on précisera l'axe.

Ici l'énoncé, dans sa construction suggère d'utiliser la question précédente : en effet, puisque les lignes de niveau de la surface Σ sont des cercles (soit vides, soit réduites à un point si $t_0 = 0$), par conséquent la surface Σ est une surface de révolution d'axe (Oz) .

Sinon si on veut utiliser un argument plus direct, sans utiliser la question précédente on remarque que $\varphi(x, y) = h(x^2 + y^2)$ ne dépend que de la distance à l'axe (Oz) . Donc la surface est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) ce qui est caractéristique d'une surface de révolution construite autour de cet axe.

7) Démontrer que la relation $(\mathcal{R})$ est vérifiée pour tout t dans I si et seulement si la fonction $\frac{f}{g}$ est constante sur I . On suppose désormais que la relation $(\mathcal{R})$ est vérifiée pour tout $t \in I$.

De $\varphi(x, y) = h(x^2 + y^2)$ on déduit que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x; y) = 2xh'(x^2 + y^2)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x; y) = 2yh'(x^2 + y^2)$

Donc la relation $(\mathcal{R})$ est équivalente à

$$2f'(t)f(t)h'(f(t)^2 + g(t)^2) - 2g'(t)g(t)h'(f(t)^2 + g(t)^2) = 0$$

Or, par hypothèse $h'(f(t)^2 + g(t)^2) \neq 0$ donc l'égalité précédente est équivalente à :

$$2f'(t)f(t) - 2g'(t)g(t) = 0$$

Ce qui équivaut à $\left(\frac{f}{g}\right)' = 0$ puisque g ne s'annule pas sur I .

Finalement on a bien l'équivalence :

La relation $(\mathcal{R})$ est vérifiée si et seulement si la fonction $\frac{f}{g}$ est constante sur I

8) En déduire que Γ est incluse dans un plan dont une équation est de la forme :

$$x + \lambda y = 0 \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si la relation $(\mathcal{R})$ est vérifiée alors la fonction $\frac{f}{g}$ est constante sur I donc $\forall t \in I, \frac{f(t)}{g(t)} = k = \frac{x(t)}{y(t)}$, où $k \in \mathbb{R}$ donc les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont proportionnelles et vérifient une relation de la forme

$$x + \lambda y = 0 \text{ où } \lambda = -k \in \mathbb{R}$$

Donc Γ est incluse dans un plan dont une équation est de la forme : $x + \lambda y = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

9)

a) Rappeler la définition d'une méridienne d'une surface de révolution.

La méridienne d'une surface de révolution est l'intersection de cette surface avec un plan contenant l'axe de révolution.

b) En déduire que la courbe Γ est incluse dans une méridienne de Σ .

On a vu que Γ est incluse dans Σ et dans un plan dont une équation est de la forme : $x + \lambda y = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Or un tel plan contient l'axe (Oz) qui est l'axe de révolution de Σ , donc Γ est incluse dans une méridienne de Σ .

Fin de l'énoncé