

Proposition de corrigé : Banque PT – Épreuve C – 2025

Préambule

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4 + 1}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{t^4 + 1} \leq \frac{1}{t^4}.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$ converge comme intégrale de Riemann donc, par théorème de comparaison pour les fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}$ est convergente. Le raisonnement est analogue pour la seconde intégrale en majorant par la fonction $t \mapsto 1/t^2$.

2. On donne le théorème demandé : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont de même nature et égales en cas de convergence. Si la fonction est strictement décroissante, le résultat persiste mais il faut permuter les bornes de la deuxième intégrale.

3. On utilise le théorème de la question précédente dans le cas où la fonction est strictement décroissante. La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, strictement décroissante. Comme $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}$ est convergente, $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)^4 + 1}$ est également convergente et on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} = - \int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)^4 + 1} = - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{t^2} \frac{dt}{1/t^4 + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt$$

donc on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt.$$

Partie I

1. La fonction h , en tant que quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ car polynomiales, est définie lorsque son dénominateur ne s'annule pas. Or le dénominateur est un trinôme du second degré dont le discriminant vérifie l'inégalité : $(-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 1 = -2 < 0$. Ainsi, le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc h est définie sur $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

2. Soit X un réel positif. En tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, h est continue sur $\mathbb{R}$ et, compte-tenu de la forme de h , on a directement :

$$\int_0^X h(t)dt = \left[\ln(t^2 + 1 - \sqrt{2}t) \right]_0^X = \ln(X^2 + 1 - \sqrt{2}X)$$

qui donne, en changeant de variable $u = -x$ sur un segment :

$$\int_X^0 h(-t)dt = \int_0^{-X} h(u)du = \ln(X^2 + 1 + \sqrt{2}X).$$

3. Soit X un réel positif. On utilise les deux questions précédentes pour obtenir :

$$\int_0^X (h(t) + h(-t))dt = \int_0^X h(t)dt + \int_0^X h(-t)dt = \ln\left(\frac{X^2 + 1 - \sqrt{2}X}{X^2 + 1 + \sqrt{2}X}\right).$$

Avec des équivalents, $\frac{X^2 + 1 - \sqrt{2}X}{X^2 + 1 + \sqrt{2}X} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ donc, par composition :

$$\int_0^X (h(t) + h(-t))dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

4. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas. En écrivant

$$\varphi : t \mapsto \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{1 + (\sqrt{2}t - 1)^2},$$

une primitive de φ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\Phi : t \mapsto \sqrt{2} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}t - 1).$$

5. Comme dans la question 1 de la partie I, g est un quotient dont le dénominateur est le même que h donc g est définie sur $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_h = \mathbb{R}$ et elle est continue sur cet ensemble comme la fonction h . Comme $g = \sqrt{2}\varphi$, on a directement une primitive de g sur $\mathbb{R}$:

$$G : t \mapsto 2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}t - 1).$$

6. On a directement, compte-tenu de l'expression de g , pour tout réel positif X :

$$\int_0^X g(-t)dt = - \int_0^{-X} g(u)du = - \left[2 \operatorname{arctan}(\sqrt{2}t - 1) \right]_0^{-X}$$

donc

$$\int_0^X g(-t)dt = 2 \operatorname{arctan}(\sqrt{2}X + 1) - \frac{\pi}{2}.$$

7. On a, pour tout réel X positif, comme précédemment :

$$\int_0^X (g(t) + g(-t))dt = 2 \operatorname{arctan}(\sqrt{2}X - 1) + \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctan}(\sqrt{2}X + 1) - \frac{\pi}{2}$$

donc, par composition et somme, comme la fonction Arctan tend vers $\pi/2$ en $+\infty$:

$$\int_0^X (g(t) + g(-t))dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2\pi.$$

8. Pour tout réel positif t , les fonctions étant définies sur $\mathbb{R}$:

$$h(t) + h(-t) + g(t) + g(-t) = \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + 1 + \sqrt{2}t} + \frac{\sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t} + \frac{\sqrt{2}}{t^2 + 1 + \sqrt{2}t}$$

donc

$$h(t) + h(-t) + g(t) + g(-t) = \frac{2t}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t} - \frac{2t}{t^2 + 1 + \sqrt{2}t} = 2t \frac{t^2 + 1 + \sqrt{2}t - (t^2 + 1 - \sqrt{2}t)}{(t^2 + 1 - \sqrt{2}t)(t^2 + 1 + \sqrt{2}t)}$$

ce qui s'écrit finalement :

$$h(t) + h(-t) + g(t) + g(-t) = 4\sqrt{2} \frac{t^2}{t^4 + 1}.$$

9. (a) Par définition d'une intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{t^2}{t^4 + 1} dt.$$

Or, avec la question précédente et la linéarité de l'intégrale, pour tout réel positif X :

$$\int_0^X \frac{t^2}{t^4 + 1} dt = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^X (h(t) + h(-t))dt + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^X (g(t) + g(-t))dt.$$

On utilise finalement les limites des questions 3 et 7 de la partie I pour obtenir, par somme :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt = \frac{1}{4\sqrt{2}} \times 2\pi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(b) Avec les questions du Préambule, on a directement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1} dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}.$$

10. On utilise finalement les calculs des questions 3 et 7 de la partie I pour obtenir :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (h(t) + h(-t)) dt + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (g(t) + g(-t)) dt.$$

puis

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(\frac{1/2+1-1}{1/2+1+1} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(0) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(1+1)$$

et finalement

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4+1} dt = \frac{2 \arctan 2 - \ln 5}{4\sqrt{2}}}.$$

Partie II

1. (a) Par le théorème de dérivation terme à terme, les fonctions C et S sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et, pour tout $x \in] -R, R[$, on a :

$$C'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \text{et} \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) b_{n+1} x^n$$

ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = -2xS(x) = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1} = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} x^n$$

donc, par unicité du développement en série entière, on obtient la première relation : pour tout entier n non nul, $\boxed{(n+1)a_{n+1} = -2b_{n-1}}$. La seconde relation résulte d'un raisonnement analogue en utilisant l'équation $S'(x) = 2xC(x)$.

- (b) Avec les relations de la question précédente, pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$a_{n+1} = -\frac{2}{n+1} b_{n-1} = -\frac{2}{n+1} \frac{2}{n-1} a_{n-3} = -\frac{4}{(n+1)(n-1)} a_{n-3}$$

ce qui s'écrit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 4, \quad a_n = -\frac{4}{n(n-2)} a_{n-4}}.$$

- (c) Cette hypothèse permet de déduire que $\boxed{\text{tous les coefficients d'indice impair sont nuls}}$.
- (d) i. Lorsque n est un entier naturel, son reste de la division euclidienne par 4 est 0, 1, 2 ou 3 donc, si r désigne ce reste, $4 \mid n-r$ ce qui signifie qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\boxed{n = 4p+r}$ où $r \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.
- ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4p+1$ ou $n = 4p+3$, n est impair donc $a_n = 0$. On suppose maintenant qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4p+2$. On a la relation

$$a_{4p+2} = \frac{-4}{(4p+3)(4p+1)} a_{4(p-1)+2}.$$

Or $0 = S(0) = b_0$ donc $a_2 = -b_0 = 0$ avec les relations des questions précédentes. Ainsi, par récurrence immédiate, $a_{4p+2} = 0$. Finalement, $\boxed{\text{si 4 ne divise pas } n, a_n = 0}$.

- (e) On prouve le résultat par récurrence. On a $a_0 = C(0) = 1 = (-1)^0/0!$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}.$$

On a

$$a_{4(p+1)} = a_{4p+4} = \frac{-4}{(4p+4)(4p+2)} a_{4p} = \frac{-4}{(4p+4)(4p+2)} \times \frac{(-1)^p}{(2p)!} = \frac{-1}{(2p+2)(2p+1)} \times \frac{(-1)^p}{(2p)!}$$

ce qui s'écrit

$$a_{4(p+1)} = \frac{(-1)^{p+1}}{(2(p+1))!}$$

et achève la récurrence. Finalement, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}}.$$

- (f) Soit z un complexe non nul. On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{a_{4(p+1)} z^{4(p+1)}}{a_{4p} z^{4p}} \right| = \frac{4}{(4p+4)(4p+2)} |z|^4$$

qui tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. Ainsi, par le critère de d'Alembert (le cas $z = 0$ étant évident), la série $\sum a_{4p} z^{4p}$ est absolument convergente pour tout complexe z . Par suite $\boxed{R = +\infty}$.

On obtient ainsi, pour tout réel x :

$$C(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{4p} x^{4p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} (x^2)^{2p} = \cos(x^2)$$

et de même, lorsque x est non nul :

$$S(x) = -\frac{1}{2x} C'(x) = \frac{1}{2x} 2x \sin(x^2) = \sin(x^2).$$

L'égalité $S(x) = \sin(x^2)$ reste vraie si x est nul, par passage à la limite, car S est continue en 0. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{C(x) = \cos(x^2) \quad \text{et} \quad S(x) = \sin(x^2)}.$$

2. (a) La série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{4n}$ s'écrit aussi $\sum_{n \geq 0} (-x^4)^n$. C'est une série géométrique de raison $-x^4$. Elle converge si et seulement si la valeur absolue de sa raison est strictement inférieure à 1. Or :

$$|-x^4| < 1 \iff |x|^4 < 1 \iff |x| < 1$$

donc la série converge si et seulement si $|x| < 1$.

$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière est donc 1.}}$

Pour tout $x \in]-1; 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^4)^n = \boxed{\frac{1}{1+x^4}}.$$

- (b)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+x^4} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} dx.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ est bien continue sur $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (-1)^n x^{4n}$ est intégrable sur le segment $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, car continue.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} |(-1)^n x^{4n}| dx &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{4n} dx \\
&= \left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2})^{4n+1}(4n+1)} \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{((\sqrt{2})^4)^n}\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{4^n}\right)
\end{aligned}$$

et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n}$ converge (c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{4} \in]-1, 1[$) donc on peut intervertir série et intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+x^4} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-1)^n x^{4n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{2})^{4n+1}(4n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(-1)^n}{((\sqrt{2})^4)^n(4n+1)} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)}}.
\end{aligned}$$

(c) On a d'après la question précédente :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Il reste à calculer cette intégrale.

En effectuant comme dans la partie I le changement de variable $x = \frac{1}{t}$, on a $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ et donc :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+x^4} dx = - \int_{+\infty}^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+\frac{1}{t^4}} \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt.$$

Or, en reprenant les notations de la partie I, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\sqrt{2}}^X \frac{t^2}{1+t^4} dt \\
&= \int_{\sqrt{2}}^X \frac{1}{4\sqrt{2}} (h(t) + h(-t) + g(t) + g(-t)) dt \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\ln(t^2 + 1 - \sqrt{2}t) - \ln(t^2 + 1 + \sqrt{2}t) \right]_{\sqrt{2}}^X + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[2 \arctan(\sqrt{2}t - 1) - 2 \arctan(-\sqrt{2}t - 1) \right]_{\sqrt{2}}^X \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\ln \left(\frac{t^2 + 1 - \sqrt{2}t}{t^2 + 1 + \sqrt{2}t} \right) \right]_{\sqrt{2}}^X + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[2 \arctan(\sqrt{2}t - 1) - 2 \arctan(-\sqrt{2}t - 1) \right]_{\sqrt{2}}^X \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(\frac{X^2 + 1 - \sqrt{2}X}{X^2 + 1 + \sqrt{2}X} \right) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(\frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}X - 1) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(-\sqrt{2}X - 1) \\
&\quad - 2 \arctan(1) + 2 \arctan(-3)
\end{aligned}$$

Quand X tend vers $+\infty$, la limite de l'expression précédente est :

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(0 + \ln 5 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \arctan(3) \right) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln 5 + \frac{3\pi}{2} - 2 \arctan(3) \right).$$

La valeur cherchée est donc $\boxed{\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln 5 + \frac{3\pi}{2} - 2 \arctan(3) \right)}$.

Partie III

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $u = t^2$. On a $t^2 e^{-t^2} = u e^{-u} \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissances comparées.

Donc $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ converge}}.$

2. Pour tout $t \in [1; +\infty[$:

$$\left| \frac{\sin(t^2)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{er} \quad \left| \frac{\cos(t^2)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$$

donc $\boxed{\text{ces intégrales convergent}}.$

3. Soit $X \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\int_1^X \cos(t^2) dt &= \frac{1}{2} \int_1^X \frac{1}{t} 2t \cos(t^2) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t} \sin(t^2) \right]_1^X - \frac{1}{2} \int_1^X \left(-\frac{1}{t^2} \sin(t^2) \right) dt \\
&= \underbrace{\frac{1}{2X} \sin(X^2)}_{\xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0} - \underbrace{\frac{1}{2} \sin(1)}_{\text{constante}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_1^X \frac{1}{t^2} \sin(t^2) dt}_{\text{converge quand } X \rightarrow +\infty \text{ d'après Q2.}}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\lim_{X \rightarrow +\infty} I(X) \text{ existe et est finie}}.$

Le raisonnement est en tout point similaire pour $J(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_1^X \sin(t^2) dt &= \frac{1}{2} \int_1^X \frac{1}{t} 2t \sin(t^2) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t} (-\cos(t^2)) \right]_1^X - \frac{1}{2} \int_1^X \left(\frac{1}{t^2} \cos(t^2) \right) dt \\
&= -\underbrace{\frac{1}{2X} \cos(X^2)}_{\xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \cos(1)}_{\text{constante}} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_1^X \frac{1}{t^2} \cos(t^2) dt}_{\text{converge quand } X \rightarrow +\infty \text{ d'après Q2.}}
\end{aligned}$$

4. Soit $X \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\int_1^X e^{it^2} dt &= \int_1^X (\cos(t^2) + i \sin(t^2)) dt \\
&= \int_1^X \cos(t^2) dt + i \int_1^X \sin(t^2) dt \\
&= I(x) + iJ(x).
\end{aligned}$$

D'après la question 3, on en déduit que $\int_1^X e^{it^2} dt$ a une limite finie quand $X \rightarrow +\infty$, donc $\boxed{\int_1^{+\infty} e^{it^2} dt \text{ converge}}.$

5. On sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{it^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!}}.$$

6. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est continue sur $[0; +\infty[$ comme quotient, composée et somme de fonctions continues. Il reste à étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$. Pour tout $t \geq 1$, on a :

$$\left| \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} \right| = \frac{e^{-t^2x^2}}{|t^2+i|} \leq \frac{e^{-t^2x^2}}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

donc l'intégrale converge en $+\infty$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ strictement positif. On effectue le changement de variable C^1 et strictement monotone :

$$u = tx.$$

Alors $du = xdt$ et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} xdt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Or on a admis dans l'énoncé que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On obtient donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}}.$$

- (c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-t^2x^2} e^{-ix^2}}{t^2+i} \right| dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x^2}}{\sqrt{1+t^4}} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dt \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{2x}. \end{aligned}$$

Donc par encadrement,

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}.$$

- (d) Soit $\varepsilon, a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\varepsilon \leq a$.

On sait que :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est C^1 comme quotient, composée, somme de fonctions C^1 , et sa dérivée est $x \mapsto -2xe^{-(t^2+i)x^2}$;
- pour tout $x \in [\varepsilon; a]$, $t \mapsto \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est intégrable (question 6a) ;
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto -2xe^{-(t^2+i)x^2}$ est continue sur $[\varepsilon; a]$.

De plus, pour tout $x \in [\varepsilon; a]$:

$$\left| -2xe^{-(t^2+i)x^2} \right| = |2x| \left| e^{-t^2x^2} \right| \leq 2a \cdot e^{-t^2\varepsilon^2}$$

De plus, $t \mapsto 2ae^{-t^2\varepsilon^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ car $2ae^{-t^2\varepsilon^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est dérivable sur $[\varepsilon; a]$.

Comme cela est vrai pour tous $\varepsilon, a \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

- (e) On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -2xe^{-(t^2+i)x^2} dt = -2xe^{-ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dt = -2xe^{-ix^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2x} = \boxed{-\sqrt{\pi}e^{-ix^2}}.$$

- (f) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrons qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. On sait que :

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} \right| \leq \frac{1}{|t^2+i|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Or $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

On en déduit, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, que $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{-\sqrt{\pi}}.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+}$,

et l'égalité $f'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$ reste valable pour $x = 0$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = -\sqrt{\pi} \int_0^x e^{-it^2} dt + c.$$

Or :

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+i} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2-i}{(t^2-i)(t^2+i)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2-i}{t^4+1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1} dt - i \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+1} dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - i \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i) \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = -\sqrt{\pi} \int_0^x e^{-it^2} dt + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i)$$

donc

$$\int_0^x e^{-it^2} dt = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

De plus, d'après la question 6c, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt - i \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} - i \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

et en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} C(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} S(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}.$$